

**FEH2I3:
PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN
APLIKASI
BAB III. SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR
ORDE 1**

October 17, 2019

SISTEM PERSAMAAN DIFERENSIAL LINEAR ORDE 1

Sub-pokok bahasan pada bab ini terdiri dari:

- 1 Sistem Linier Persamaan Diferensial Orde 1
- 2 SPL Homogen
- 3 SPL Non Homogen

Sistem Persamaan Diferensial Linear Orde 1

Sistem linear persamaan diferensial orde 1 memiliki persamaan sebagai berikut :

$$\frac{dx_1}{dt} = a_{11}(t)x_1 + a_{12}(t)x_2 + \cdots + a_{1n}(t)x_n + f_1(t)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = a_{21}(t)x_1 + a_{22}(t)x_2 + \cdots + a_{2n}(t)x_n + f_2(t)$$

.

.

$$\frac{dx_n}{dt} = a_{n1}(t)x_1 + a_{n2}(t)x_2 + \cdots + a_{nn}(t)x_n + f_n(t)$$

Sistem linier terdiri dari beberapa persamaan diferensial dan terdiri dari 2 variabel atau lebih, sehingga persamaannya akan dinyatakan dalam bentuk matriks. Sistem linier terdiri dari SPL Homogen dan SPL Non Homogen.

SPL Homogen

SPL Homogen memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$X' = A \cdot X \quad (1)$$

Dalam menentukan solusi dari penyelesaian system linear homogen, ada beberapa langkah yang harus dilakukan, diantaranya adalah :

- 1 Untuk memenuhi system homogen dan mencari persamaan karakteristik, maka persamaan diferensial dari system memenuhi syarat :

$$\det(A - \lambda I) = 0 \quad (2)$$

- 2 Menentukan nilai vektor K untuk setiap nilai eigen (λ) dengan persamaan :

$$(A - \lambda I)K = 0 \quad (3)$$

- 3 Menentukan solusi umum dari system homogen dari 3 kemungkinan nilai eigen (λ) yang diperoleh

SPL Homogen - cont

Nilai eigen (λ) yang dihasilkan ada 3 kemungkinan, yaitu :

- 1 Nilai eigen (λ) real berbeda , yaitu ketika ($\lambda_1 \neq \lambda_2$)
Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t} \quad (4)$$

- 2 Nilai eigen (λ) real kembar , yaitu ketika ($\lambda_1 = \lambda_2$)
Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 K e^{\lambda t} + C_2 [K t e^{\lambda t} + P e^{\lambda t}] \quad (5)$$

- 3 Nilai eigen (λ) kompleks konjugate , yaitu ketika ($\lambda_1 = \alpha + \beta i$
dan $\lambda_2 = \alpha - \beta i$)
Solusi Homogen yang dihasilkan adalah

$$y = C_1 [B_1 \cos \beta t - B_2 \sin \beta t] e^{\alpha t} + C_2 [B_2 \cos \beta t - B_1 \sin \beta t] e^{\alpha t} \quad (6)$$

SPL Homogen - cont

Contoh 1

Tentukan solusi homogen dari SPL berikut:

$$\frac{dx}{dt} = -6x + 2y$$

$$\frac{dy}{dt} = -3x + y$$

Penyelesaian

- Ubah SPL ke dalam bentuk persamaan $X' = A \cdot X$, dimana

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

,sehingga

$$X' = A \cdot X$$
$$X' = \begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} X$$

SPL Homogen - cont

- 2 Tentukan nilai eigen (λ) dari SPL tersebut dengan cara:

$$\det(A - \lambda I) = 0$$

$$\begin{vmatrix} -6 - \lambda & 2 \\ -3 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -5$$

- 3 Menentukan vektor eigen untuk setiap nilai eigen (λ)
a. Untuk $\lambda_1 = 0$, maka

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh :

SPL Homogen - cont

$$\begin{pmatrix} -6 & 2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}b_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} 3b_1 + b_2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 - 1/3k_2 = 0$$

$$k_1 = 1/3k_2$$

Jika $k_2 = 3$, maka $k_1 = 1$

$$K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

SPL Homogen - cont

b. Untuk $\lambda_2 = -5$, maka

$$(A - \lambda I)K = 0$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dengan OBE diperoleh :

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} - b_1 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix} 3b_1 + b_2 \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 - 2k_2 = 0$$

$$k_1 = 2k_2$$

Jika $k_2 = 1$, maka $k_1 = 2$

$$K_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3 Menentukan solusi Homogen

Karena λ_1 dan λ_2 merupakan akar real berbeda, maka solusi homogennya adalah:

$$y = C_1 K_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 K_2 e^{\lambda_2 t}$$

$$y_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-5t}$$

LATIHAN

Carilah Solusi Homogen dari SPL berikut

1

$$X' = \begin{pmatrix} 12 & -9 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} X$$

2

$$\frac{dx}{dt} = 5x + y$$

$$\frac{dy}{dt} = -2x + 3y$$

3

$$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$$