FEH2I3: PERSAMAAN DIFERENSIAL DAN APLIKASI

SPL NON HOMOGEN

October 26, 2019

SPL NON HOMOGEN

Materi :

1. Solusi Homogen
2. Solusi Non Homogen
3. Solusi Khusus

SPL NON HOMOGEN

Sebuah sistem persamaan diferensial orde satu linear dapat dituliskan sebagai berikut :

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \dots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \dots & a_{2n}(t) \\ \vdots & & & \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \dots & a_{nn}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$$

atau dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{X}' = \mathbf{AX} + \mathbf{F}$$

SPL NON HOMOGEN

SPL Non Homogen terdiri dari 2 solusi, yaitu solusi Homogen dan Solusi Non Homogen.
Jika X_h merupakan solusi homogen dan X_p merupakan solusi non homogen dari sebuah SPL, maka solusi umum dari SPL non homogen adalah :

$$X = X_h + X_p$$

Untuk memperoleh solusi non homogen, maka ada dua metode yang dapat digunakan yaitu Metode Koefisien Tak Tentu dan Metode Variasi Parameter

SPL Non Homogen dengan Metode Koefisien Tak Tentu

Metode koefisien tak tentu digunakan untuk memperoleh solusi partikular. SPL Non Homogen yang dapat diselesaikan dengan metode koefisien tak tentu adalah ketika nilai kolom matriks F(t) nya dapat diasumsikan dengan bentuk-bentuk yang tersedia pada tabel berikut

No	Bentuk F(t)	Bentuk Xp
1	$F(t) = a$	A
2	$F(t) = at+b$	$At+B$
3	$F(t) = at^2+bt+c$	At^2+Bt+C
4	$F(t) = e^{at}$	Ae^{at}
5	$F(t) = \sin at$	$A \sin at + B \cos at$
6	$F(t) = \cos at$	$A \sin at + B \cos at$
7	$F(t) = e^{bt} \sin at$	$e^{bt} (A \sin at + B \cos at)$
8	$F(t) = e^{bt} \cos at$	$e^{bt} (A \sin at + B \cos at)$

Menyelesaikan SPL Non Homogen dengan Metode Koefisien Tak Tentu

Sebuah SPL Non Homogen memiliki bentuk umum sebagai berikut :

$$X' = AX + F(t)$$

Dimana $F(t)$ merupakan sebuah matriks kolom yang tidak sama dengan nol.
Untuk menyelesaikan sebuah SPL Non Homogen, maka ada beberapa langkah yang harus dilakukan, antara lain :

1. Menentukan solusi homogen dengan membuat matriks kolom $F(t) = 0$

$$X' = AX$$

SPL Non Homogen dengan Metode Koefisien Tak Tentu

2. Menentukan asumsi solusi non homogen (X_p) sesuai dengan bentuk $F(t)$ yang diketahui berdasarkan tabel Metode Koefisien Tak Tentu
3. Menenentukan turunan pertama dari X_p , yaitu X_p'
4. Substitusikan X_p dan X_p' ke dalam persamaan :

$$X_p' = AX_p + F(t)$$

5. Diperoleh solusi non homogen (X_p) sesuai dengan bentuk yang diasumsikan
6. Solusi Total dari SPL Non Homogen adalah :

$$X = X_h + X_p$$

Contoh 1

Jika diketahui sebuah SPL Non Homogen sebagai berikut :

$$\frac{dx}{dt} = -x + 2y - 8$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y + 3$$

Tentukan solusi umum dari SPL tersebut!

Jawab :

Pertama, persamaan tersebut kita ubah terlebih dahulu ke dalam bentuk matriks, sehingga

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Contoh 1 - cont

Lalu, selesaikan sistem homogennya

$$X' = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} X$$

Persamaan karakteristik

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 9 \\ -1 & 11-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 - 16\lambda + 64 = 0$$

diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = \lambda_2 = 8$
Berdasarkan metode yang sudah dipelajari, didapatkan solusi

$$X_h = c_1 \begin{pmatrix} 3e^{8t} \\ e^{8t} \end{pmatrix} + c_2 (\begin{pmatrix} 3te^{8t} \\ te^{8t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{8t} \\ 4e^{8t} \end{pmatrix})$$

Contoh 1 - cont

Sekarang mari kita cari solusi khusus untuk sistem non homogen. Karena $F(t)$ merupakan fungsi konstan maka kita asumsikan solusi non homogen berbentuk

$$X_p = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

maka,

$$X_p' = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Kemudian kita substitusikan X_p dan X_p' ke sistem non homogennya,

$$X_p' = AX_p + F(t)$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ -1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Diperoleh $a_1 = 1/2$ dan $b_1 =$ -1/2

Contoh 1 - cont

Sehingga diperoleh

$$\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Akhirnya, didapat Solusi Sistem Nonhomogen tersebut adalah

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

$$X_h = c_1 \begin{pmatrix} 3e^{8t} \\ e^{8t} \end{pmatrix} + c_2 (\begin{pmatrix} 3te^{8t} \\ te^{8t} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e^{8t} \\ 4e^{8t} \end{pmatrix}) + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

Selesaikan sistem berikut

$$X' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 6t \\ -10t + 4 \end{pmatrix}$$

Jawab :
Nilai eigen dan vektor eigen dari sistem homogen

$$X' = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

adalah
Persamaan karakteristik

$$det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 6-\lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} =$$

$$\lambda^2 - 9\lambda + 14 = 0$$

diperoleh nilai eigen $\lambda_1 = 2$ $\lambda_2 = 7$

Contoh 2 - Cont

Berdasarkan metode yang sudah dipelajari, didapatkan vektor eigen

$$\lambda_1 = 2 \rightarrow K_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = 7 \rightarrow K_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oleh karena itu, solusi dari sistem homogennya adalah

$$X_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t}$$

Contoh 2 - cont

Sekarang mari kita cari solusi khusus untuk sistem non homogen. Karena $F(t)$ merupakan fungsi linear yang bisa dituliskan sebagai

$$F(t) = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

maka, solusi dari sistem nonhomogen kita asumsikan

$$X_p = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

$$X_p' = \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix}$$

Kemudian kita substitusikan X_p dan X_p' ke sistem non homogennya,

Contoh 2 - Cont

$$X_p' = AX_p + F(t)$$

$$\begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix}$$

Sehingga

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (6a_2 + b_2 + 6)t + 6a_1 + b_1 - a_2 \\ (4a_2 + 3b_2 - 10)t + 4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 \end{pmatrix}$$

Diperoleh 4 persamaan :

$$6a_2 + b_2 + 6 = 0 \tag{1}$$

$$4a_2 + 3b_2 - 10 = 0 \tag{2}$$

$$6a_1 + b_1 - a_2 = 0 \tag{3}$$

$$4a_1 + 3b_1 - b_2 + 4 = 0 \tag{4}$$

Contoh 2 - cont

dari persamaan (1) dan (2) diperoleh bahwa nilai $a_2 = -2$ dan $b_2 = 6$
sedangkan dari persamaan (3) dan (4) diperoleh bahwa nilai $a_1 = -4/7$ dan $b_1 = 10/7$
Sehingga solusi non homogennya adalah :

$$X_p = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$$

Akhirnya, solusi sistem nonhomogen tersebut adalah

$$\mathbf{X} = \mathbf{X_h} + \mathbf{X_p}$$

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} e^{2t} + c_2(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^{7t} + \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -4/7 \\ 10/7 \end{pmatrix}$$

LATIHAN

Selesaikan sistem berikut dengan Metode Koefisien Tak Tentu sehingga dihasilkan solusi umumnya

1. $$X' = \begin{pmatrix} 4 & \frac{1}{3} \\ 9 & 6 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} -3 \\ 10 \end{pmatrix} e^{t}$$

2. $$X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{4t}$$

3. $$X' = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} sint \\ -2cost \end{pmatrix}$$