

Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom
Fakultas Teknik Elektro
Jurusan Telekomunikasi



Persamaan
Diferensial
dan
Aplikasi

Lecture 7 : Aplikasi Persamaan Diffensial Orde Satu

Program Studi Teknik Telekomunikasi

September 3, 2019

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

1 Aplikasi PD Linier

Tujuan

- 1 Mahasiswa dapat memodelkan permasalahan fisis ke PD Orde satu
- 2 Mahasiswa dapat menyelesaikan Model PD Orde satu tersebut

Aplikasi PD Orde

Ada banyak aplikasi PD orde. Dalam pembahasan ini, maka beberapa aplikasi yang dibahas yaitu

- 1 masalah populasi
- 2 hukum Newton pada kasus pendinginan temperatur
- 3 Benda jatuh bebas

Meski aplikasi yang ditinjau adalah 3 kasus ini, diharapkan setelah memahami konsepnya, mahasiswa dapat pula menerapkan pada kasus aplikasi elementer lainnya.

Masalah populasi

Populasi makhluk hidup dalam kondisi normal cenderung meningkat, dan dalam kondisi tertekan (wabah, predator, ...) dapat menurun. Jika populasi suatu saat dinyatakan dengan y , maka laju perubahan populasi (bertambah atau berkurang) dinyatakan dengan $\frac{dy}{dt}$. Laju populasi biasanya sebanding dengan penduduk saat ini (y), ditambah faktor mempercepat (imigrasi, kemakmuran, ... α) dan dikurangi faktor yang menurunkan populasi (emigrasi, wabah, ... β). PD populasi:

$$\frac{dy}{dt} = ky + \alpha - \beta$$

α faktor yang menambah populasi; β faktor yang mengurangi populasi. ($\alpha = \beta = 0 \implies$ populasi hanya dipengaruhi kondisi internal)

Contoh:

- Pertumbuhan penduduk suatu negara adalah menjadi **dua kali** dalam **50 tahun**. Dalam berapa tahun jumlah penduduk akan menjadi tiga kali?
- Jawab : PD populasi (k suatu konstanta)

$$\frac{dy}{dt} = ky$$

- Dengan pemisahan variable:

$$\frac{dy}{dt} = ky \implies \frac{dy}{y} = k \implies \ln y = kt + c \implies y = ce^{kt}$$

- Saat $t = 0 \implies y_0 = ce^0 = c$ (1)
- Saat $t = 50 \implies y_{50} = 2y_0 = ce^{k50}$ (2)
- Bagi (2) dengan (1) : $\frac{2y_0}{y_0} = \frac{ce^{k50}}{c} \implies 2 = e^{k50} \implies k = \frac{\ln 2}{50}$

Lanjutan:

- Solusi PD: $y = ce^{kt} = y_0 e^{\frac{\ln 2}{50} t}$ → y_0 adalah jumlah penduduk mula-mula.
- Dalam berapa tahun jumlah penduduk akan menjadi tiga kali ($y = 3y_0$)?

$$3y_0 = y_0 e^{\frac{\ln 2}{50} t} \implies e^{\frac{\ln 2}{50} t} = 3 \implies \frac{\ln 2}{50} t = \ln 3 \implies t = 50 \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 79$$

- atau Penduduk kota tersebut menjadi tiga kali lipat setiap 79 tahun.

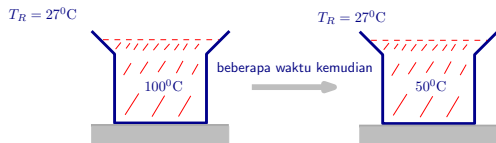
Contoh lain:

- Kota Balibon berkembang 1,5 kali dalam 10 tahun. Dalam berapa tahun jumlah penduduk akan menjadi 10 kali?
- Jawab :

Contoh lain:

- Laju perkembangan bakteri dalam suatu kultur sebanding dengan populasi bakteri tersebut. Jika dalam setiap 4 jam populasi bakteri menjadi 2 kali, berapa kali populasi bakteri semula, setelah 10 jam?
- Jawab :

Hukum Newton pada bidang temperatur



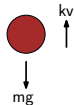
- 1 Air mendidih (100°C), jika diletakkan pada suatu ruang dengan temperatur (27°C) maka temperature akan turun.
- 2 laju penurunan temperatur ini adalah **sebanding** dengan **selisih** temperatur air dan temperatur ruangan
- 3 Jika temperatur air pada waktu t adalah T , dan temperatur ruangan adalah T_R , maka PD sistem: $\frac{dT}{dt} = -k(T - T_R)$
- 4 Tanda negatif menunjukkan temperatur air / benda **berkurang** dari waktu ke waktu.

Contoh: Air mendidih pada 100°C diletakkan pada ruang terbuka dengan temperatur 20°C . Setelah 10 menit, ternyata temperatur air menjadi 80°C . Jika ditunggu 10 menit lagi (20 menit dari saat waktu mula-mula), berapa temperatur air sekarang? **Jawab:**

Contoh: Lempeng besi panas dikeluarkan dari tanur. Temperatur mula-mula besi adalah 600°C pada $t_0 = 0$. Jika 20 menit dari t_0 temperatur besi menjadi 400°C , tentukan temperatur besi 1 jam setelah dikeluarkan dari tanur dengan asumsi temperatur ruang adalah 30°C !

Jawab:

Benda jatuh bebas dan tahanan udara

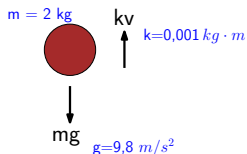


- 1 dua gaya pada benda jatuh bebas: gaya gravitasi $F_G = mg$ dan gaya gesek $F_D = kv$
- 2 Total gaya:
 $F_T = F_G - F_D = mg - kv$
- 3 Hukum Newton: $F_T = ma = m \frac{dv}{dt}$
- 4 Dengan demikian PD orde 1 :
 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$

Contoh:

Susun PD dalam kecepatan (v) dan waktu (t) dan selesaikan PD yang menyatakan benda jatuh bebas, dengan asumsi massa benda 2 kg , percepatan gravitasi $9,8 \text{ m/s}^2$, dan tahanan udara adalah $0,001 \text{ kg} \cdot m$.

Jawab:.....



Lanjutan...

- 1 Jika pada $t = 0$ kecepatan benda mula-mula adalah 0 m/s , berapa kecepatan benda 60 detik kemudian?
- 2 Berapa kecepatan **steady state** benda (v saat $t \rightarrow \infty$)?

Latihan

Selesaikan soal-soal berikut:

- 1 Bunga simpanan di Bank *IRAB* ($\frac{dP}{dt}$) setiap tahun adalah seperseratus dari kebalikan besar pokok simpanan P ($\frac{dP}{dt} = \frac{1}{1000} \frac{1}{P}$). Fredy **mula-mula** menyimpan uangnya sebesar **10 juta**. **Selesaikan PD** yang menyatakan total uang Fredy (P) setiap saat di Bank *IRAB* tersebut. Berapa **uang total** Fredy pada akhir bulan ke-10?
- 2 Jono menempa besi untuk dibuat golok. **Setelah dikeluarkan** dari penempaan, temperatur besi adalah 1.000°C . Besi tersebut dibiarkan di ruangan terbuka dengan temperatur sebesar 30°C . Ternyata dalam **20 menit**, temperatur besi turun menjadi 600°C . Berapa temperatur besi setelah **30 menit** dikeluarkan dari penempaan?

Latihan... lanjutan

- 3 Suatu meteor jatuh bebas ke bumi dengan kecepatan awal 0 m/s . Masa meteor dianggap konstan sebesar 1 kg . Koefisien gesek (k) dianggap $0,0001 \text{ km} \cdot \text{m}$ dan percepatan gravitasi (g) adalah $9,8 \text{ m/s}^2$.
- 1 Tentukan PD yang dalam v dan t yang menyatakan kecepatan meteor setiap saat.
 - 2 Tentukan kecepatan meteor setelah 10 detik!
 - 3 Meteor menabrak hutan setelah 30 menit. Tentukan kecepatan meteor saat tabrakan itu.