

Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom  
Fakultas Teknik Elektro  
Jurusan Telekomunikasi



Persamaan  
Diferensial  
dan  
Aplikasi

# Lecture 9 : PD Linier dengan Koefisien Konstan Orde 2 Homogen

Program Studi Teknik Telekomunikasi

September 17, 2019

# Tujuan

- 1 Mahasiswa dapat mengidentifikasi PD Linier dengan Koefisien Konstan Orde 2 (PDLKK Orde 2)
- 2 Mahasiswa dapat menyelesaikan PDLKK orde 2 tersebut melalui persamaan karakteristik

## PD Linier Orde Dua

Pada Slide 6 telah dibahas tentang PD Linier orde 1 dalam bentuk:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

- 1 Jika  $P(x)$  adalah konstan, maka PD tersebut disebut PD Linier orde 1 dengan koefisien konstan (PDL-KK)
- 2 **Contoh:**  $\frac{dy}{dx} + 3y = 12x$  adalah PD Linier orde 1 dengan koef konstan.
- 3 PD bentuk ini kita temui banyak terealisasi pada rangkaian RL dan RC seri.
- 4 Pada slide ini, PD Linier orde 2 dengan koef konstan akan dibahas secara mendetil.
- 5 PD jenis ini muncul pada rangkaian RLC baik serial maupun paralel serta kasus-kasus fisis lainnya.

# PD Linier dengan Koefisien Konstan Orde 2 (PDLKK orde 2) Homogen dan Heterogen

- ❶ PDLKK orde 2 memiliki bentuk:

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = Q(x)$$

dengan  $a$ ,  $b$ , and  $c$  konstan dan  $Q(x)$  adalah fungsi dalam  $x$ .

- ❷ Jika  $Q(x) = 0$  maka PDLKK ini disebut **PDLKK Homogen**
- ❸ Jika  $Q(x) \neq 0$  maka PDLKK ini disebut **PDLKK Heterogen**

## PD Linier dengan Koefisien Konstan Orde 2 (PDLKK orde 2) Homogen dan Heterogen

- ①  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 3y = 0 \rightarrow$  adalah PDLKK orde 2 Homogen
- ②  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 3y = 2 \rightarrow$  adalah PDLKK orde 2 Heterogen
- ③  $\frac{d^2y}{dx^2} + 2x\frac{dy}{dx} + 3y = 2 \rightarrow$  adalah PDL namun tidak berkoefisien konstan
- ④  $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \rightarrow$  adalah bukan PDL
- ⑤  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 + 1 \rightarrow$  adalah ...
- ⑥  $\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dx} + 4y = 3x^2 + 1 \rightarrow$  adalah ...
- ⑦  $2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 0 \rightarrow$  adalah ...
- ⑧  $2\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 8y = 5 \cos 2x \rightarrow$  adalah ...

## PDLKK Orde 2 Homogen

- 1 PDLKK orde 2 homogen memiliki bentuk

$$a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = 0$$

- 2 Metode populer untuk menyelesaikannya adalah dengan Persamaan Karakteristik (PK), yakni substitusi:

Suku	Substitusi
$\frac{d^2 y}{dx^2}$	$r^2$
$\frac{dy}{dx}$	$r$
$y$	$1$

- 3  $a \frac{d^2 y}{dx^2} + b \frac{dy}{dx} + c y = 0 \rightarrow ar^2 + br + c = 0$

## Contoh

- 1 Persamaan Karakteristik dari  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 3y = 0$  adalah  $r^2 + 4r + 3 = 0$
- 2 PK dari  $3\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + \frac{3}{4}y = 0$  adalah  $3r^2 + 3r + \frac{3}{4} = 0$
- 3 PK dari  $\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 4y = 0$  adalah .....
- 4 PK dari  $6\frac{dy}{dx} + 11\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$  adalah .....
- 5 PK dari  $6\frac{dy}{dx} + 8\frac{d^2y}{dx^2} = 7y$  adalah .....
- 6 PK dari  $\frac{dy}{dx} = 9\frac{d^2y}{dx^2} + 7y$  adalah .....
- 7 PK dari  $y = \frac{dy}{dx} + 2\frac{d^2y}{dx^2}$  adalah .....

## Penyelesaian PD Homogen

- 1 PK dari PDLKK orde 2 adalah persamaan kuadrat dalam  $r$
- 2 Dengan rumus ABC akar-akar PK dalam  $r$  dapat dicari yaitu :  $r_1$  dan  $r_2$ .
- 3 Terdapat 3 kemungkinan:
  - 1 Dua akar riil berbeda:  $r_1 \neq r_2$  Solusi PD :  
$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$
  - 2 Dua akar riil kembar :  $r_1 = r_2$  Solusi PD :  
$$y = (c_1 + c_2 x) e^{r_1 x}$$
  - 3 Dua akar kompleks sekawan:  $r_1 = \alpha + j\beta$  ;  $r_2 = \alpha - j\beta$  Solusi PD :  
$$y = e^{\alpha x} (c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$$



## Contoh:

Selesaikan PDLKK Orde 2:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

**Jawab:**

- 1 Persamaan karakteristik:

$$r^2 - 3r + 2 = 0 \implies (r - 1)(r - 2) = 0$$

- 2 Akar-akar PK adalah:  $r = 1$  dan  $r = 2$

- 3 Kedua akar riil dan berlainan, dengan demikian solusi PD adalah:

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$$

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 15y = 0$$

**Jawab:** .....

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$$

**Jawab:**

- Persamaan Karakteristik:

$$r^2 + 4r + 4 = 0 \implies (r + 2)^2 = 0 \implies r_1 = r_2 = -2$$

- Dengan demikian solusi dari PDLKK ini adalah

$$y = (c_1 + c_2 x)e^{-2x}$$

dengan  $c_1$  dan  $c_2$  adalah konstanta

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 8\frac{dy}{dx} + 16y = 0$$

**Jawab:**

- .....

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 22\frac{dy}{dx} + 121y = 0$$

**Jawab:**

- .....

Tentukan Solusi PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = 0$$

**Jawab:**

- Persamaan Karakteristik:

$$r^2 + 9 = 0 \implies (r + 3i)(r - 3i) = 0 \implies r_1 = -3i \quad r_2 = 3i$$

- atau  $r_{1,2} = 0 \pm 3i \implies \alpha = 0$  dan  $\beta = 3$
- dengan demikian solusi PD umum PDLKK Homogen tersebut adalah

$$y = e^{0x} (c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x) = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x$$

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 16y = 0$$

**Jawab:**

- .....

Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 8\frac{dy}{dx} + 17y = 0$$

**Jawab:**

- .....



Tentukan Solusi umum PDLKK Homogen

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 13y = 0$$

**Jawab:**

- .....

## Solusi Khusus PDLKK Homogen

Tentukan khusus dari PDLKK Homogen orde 2 diperoleh dengan dua syarat batas, yaitu :

- 1 Nilai batas  $y$ :  $y(x_1) = y_1$
- 2 Nilai batas  $y'$ :  $y'(x_2) = y_2$

Kedua nilai ini diperlukan untuk mencari konstanta  $c_1$  dan  $c_2$  dari solusi umum.

## Contoh:

Tentukan solusi khusus dari PDLKK Homogen:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 2y = 0$  dengan syarat batas yaitu:  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 2$ .

**Jawab:**

- Persamaan karakteristik:  $r^2 + 3r + 2 = 0 \implies (r + 1)(r + 2) = 0 \implies r_1 = -1$  dan  $r_2 = -2$
- Solusi umum:  $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-2x}$
- Masukkan syarat batas  
 $y(0) = 1 \implies 1 = c_1 e^{-0} + c_2 e^{-2 \cdot 0} \implies c_1 + c_2 = 1 \dots \dots (1)$
- hitung  $y'(x)$  yaitu:  $y'(x) = -c_1 e^{-x} - 2c_2 e^{-2x}$
- masukkan syarat batas turunan:  $y'(0) = 2 \implies 2 = -c_1 e^{-0} - 2c_2 e^{-2 \cdot 0} \implies -c_1 - 2c_2 = 2 \dots \dots (2)$
- Jumlahkan (1) dan (2):  $-c_2 = 3 \implies c_2 = -3$ , substitusi  $c_2$  ke (1):  $c_1 = 4$
- Dengan demikian solusi khusus yang memenuhi syarat batas:  
 $y(x) = 4e^{-x} - 3e^{-2x}$

## Contoh:

Tentukan solusi khusus dari PDLKK Homogen:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0$   
dengan syarat batas yaitu:  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 3$ .

**Jawab:**

- .....

## Contoh:

Tentukan solusi khusus dari PDLKK Homogen:  $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 4y = 0$   
dengan syarat batas yaitu:  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 1$ .

**Jawab:**

- .....

# LATIHAN

Tentukan solusi umum dari PDLKK Homogen:

- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 14\frac{dy}{dx} + 49y = 0$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 10y = 0$

Tentukan solusi khusus dari PD berikut:

- $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 20y = 0$  dengan :  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 1$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 14\frac{dy}{dx} + 49y = 0$  dengan :  $y(0) = 1$  dan  $y'(0) = 3$
- $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 10y = 0$  dengan :  $y(0) = 2$  dan  $y'(0) = 5$ .