

Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom
Fakultas Teknik Elektro
Jurusan Telekomunikasi



Persamaan
Diferensial
dan
Aplikasi

Lecture 7 : Aplikasi Persamaan Diffensial Orde Satu (Bagian II)

Program Studi Teknik Telekomunikasi

September 9, 2019

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan

- 1 Mahasiswa dapat memodelkan permasalahan fisis ke PD Orde satu pada bidang Rangkaian listrik
- 2 Mahasiswa dapat menyelesaikan Model PD Orde satu tersebut

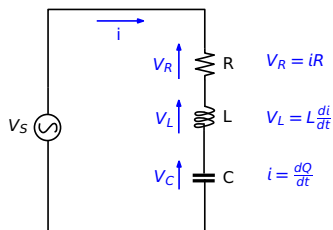
Aplikasi PD Orde

Pada Bagian 2 ini akan dibahas secara spesifik aplikasi PD pada kasus Rangkaian Listrik. Kasus sederhana yang dibahas adalah kasus R dan L, serta kasus R dan C.

- 1 Rangkaian RL dan RC seri memberikan PD Linier orde 1
- 2 Rangkaian RL dan RC seri memberikan PD orde 1 sederhana yang dapat diselesaikan dengan pemisahan variabel.
- 3 Pembahasan sumber eksternal dibahas lebih lanjut pada MK Rangkaian Listrik. Target pada MK ini hanya memperoleh persamaan differensial rangkaian

Karakteristik Komponen R,L, dan C

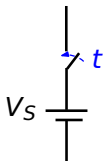
Perhatikan rangkaian RLC serial berikut:



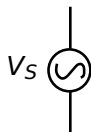
- 1 Tegangan yang jatuh di R adalah $V_R = iR$
- 2 Tegangan yang jatuh di L adalah $V_L = L \frac{di}{dt}$
- 3 Arus yang mengalir di C adalah $i_C = \frac{dQ}{dt} = \frac{dCV_C}{dt} = C \frac{dV_C}{dt}$
- 4 Rangkaian R dan L atau rangkaian R dan C biasanya menghasilkan PD orde 1

Macam-macam Sumber tegangan

- 1 Sumber tegangan searah (dengan saklar kontak)
- 2 Sumber tegangan bolak-balik (sinusoidal)
- 3 Sumber tegangan sebarang fungsi



(A)



(B)

- (A) menunjukkan sumber searah dengan saklar ($V_S = k$ volt)
- (B) menunjukkan sumber tegangan bolak-balik ($V_S = k \sin \omega t$)
- (B) juga digunakan untuk sumber tegangan sebarang fungsi ($V_S = e^{-2t}$ dsb.)

Bentuk integral

- 1 Untuk sumber tegangan bolak-balik/sinusoidal, dalam penyederhanaan PD, sering kita temui bentuk:

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt$$

atau

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt$$

- 2 Dengan teknik integral parsial, kedua bentuk tersebut dapat diselesaikan menjadi

$$\int e^{\alpha t} \cos \beta t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \cos \beta t + \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \sin \beta t + c$$

dan

$$\int e^{\alpha t} \sin \beta t dt = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \sin \beta t - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} e^{\alpha t} \cos \beta t + c$$

Contoh

$$\textcircled{1} \int e^{3t} \cos 2t \, dt = \frac{3}{3^2+2^2} e^{3t} \cos 2t + \frac{2}{3^2+2^2} e^{3t} \sin 2t = \frac{3}{13} e^{3t} \cos 2t + \frac{2}{13} e^{3t} \sin 2t + c$$

$$\textcircled{2} \int e^t \cos 4t \, dt = \dots + \dots = \dots$$

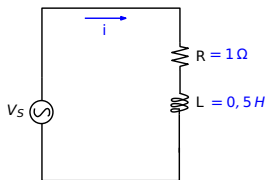
$$\textcircled{3} \int e^{-2t} \cos 4t \, dt = \dots + \dots = \dots$$

$$\textcircled{4} \int e^{3t} \sin 4t \, dt = \dots + \dots = \dots$$

$$\textcircled{5} \int e^{-5t} \cos 12t \, dt = \dots + \dots = \dots$$

Contoh: Rangkaian RL seri dengan input sinusoidal

Diberikan rangkaian:



Jika $V(s) = 2 \cos t$,
tentukan tegangan
 V_L dan arus $i!$

Jawab:

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \quad V_S &= V_R + V_L = iR + L \frac{di}{dt} \\ &\Rightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_S}{L} \\ &\Rightarrow \frac{di}{dt} + 2i = 4 \cos t \end{aligned}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{PD ini linier dengan } P(t) = 2 \text{ dan } Q(t) = 4 \cos t$$

$\textcircled{3}$ Faktor pengali:

$$J = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 2dt} = e^{2t}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{4} \quad i(t) &= \frac{\int JQ(t)}{J} dt = \frac{\int e^{2t} 4 \cos t dt}{e^{2t}} \\ &= 4e^{-2t} \int e^{2t} \cos 4t dt = \end{aligned}$$

$$4e^{-2t} \left(\frac{2}{2^2+4^2} e^{2t} \cos 4t + \frac{4}{2^2+4^2} e^{2t} \sin 4t + c \right)$$

Contoh: Rangkaian RL seri (lanjutan...)

① $i(t) = \frac{8}{19} \cos 4t + \frac{16}{19} \sin 4t + ce^{-2t}$

② Tegangan $V_L = L \frac{di}{dt} = 0,5 (\dots\dots\dots) = \dots$

Catatan

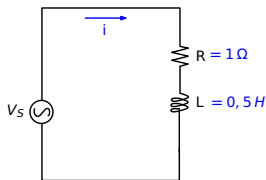
- ① Pada terminologi RL, suku: $\frac{8}{19} \cos 4t + \frac{16}{19} \sin 4t$ disebut response paksa (dari sumber eksternal)
- ② Suku: ce^{-2t} disebut response natural (disebabkan oleh konfigurasi rangkaian yaitu R dan L pada kasus ini)
- ③ Nilai konstanta c ditentukan dari nilai batas. Misal jika $i(0) = 1$ ampere, maka $c = \frac{11}{19}$

Contoh: Rangkaian RL seri dengan input sinusoidal

Jawab:

①

Diberikan rangkaian:



Jika

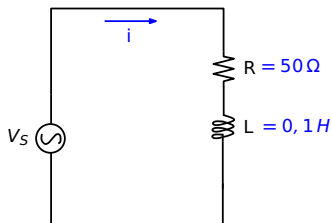
$$V(s) = 5 \cos 2t,$$

tentukan tegangan

V_L dan arus i !

Rangkaian RL seri dengan input eksponensial

Diberikan rangkaian:



Jika $V(s) = e^{-t}$, tentukan tegangan V_L dan arus i !

Jawab:

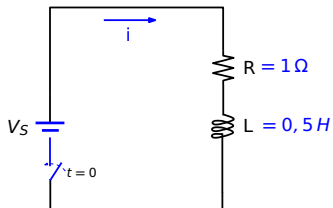
- 1 $V_S = V_R + V_L = iR + L \frac{di}{dt}$
 $\implies e^{-t} = 50i + 0,1 \frac{di}{dt}$
 $\implies \frac{di}{dt} + 500i = 10e^{-t}$
- 2 PD ini linier dengan $P(t) = 500$ dan $Q(t) = 10e^{-t}$
- 3 Faktor pengali:
 $J = e^{\int P(t)dt} = e^{\int 500dt} = e^{500t}$
- 4 $i(t) = \frac{\int JQ(t) dt}{J} = \frac{\int e^{500t} 10e^{-t} dt}{e^{500t}}$
 $= \frac{\int 10e^{499t} dt}{e^{500t}} = \frac{\frac{10}{499} e^{499t} + c}{e^{500t}}$
 $= \frac{10}{499} e^{-t} + ce^{-500t}$
- 5 Tegangan $V_L = L \frac{di}{dt} =$
 $0,1 \left(-\frac{10}{499} e^{-t} - 500ce^{-500t} \right) = \dots$

Latihan - input DC

Jawab:

1

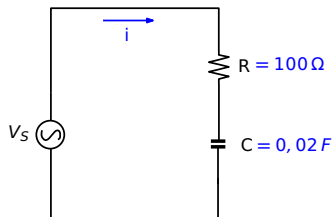
Diberikan rangkaian:



Jika $V(s) = 3$, tentukan
tegangan V_L dan arus i !

Rangkaian RC seri dengan input eksponensial

Diberikan rangkaian:



Jika $V(s) = e^{-t}$, tentukan tegangan V_C dan arus i !

Jawab:

- 1 $i = C \frac{dV_C}{dt} = 0,02 \frac{dV_C}{dt}$
- 2 Arus dengan besar sama mengalir juga di resistor
 $\implies i = \frac{V_R}{R} = \frac{V_R}{100} = 0,01 V_R$
- 3 Sehingga $0,02 \frac{dV_C}{dt} = 0,01 V_R$
- 4 Gunakan fakta bahwa:
 $V_S = V_R + V_C \implies V_R = V_S - V_C$
- 5 $0,02 \frac{dV_C}{dt} = 0,01 V_R =$
 $0,01(V_S - V_C) = 0,01 V_S - 0,01 V_C$
- 6 PD orde 1: $\frac{dV_C}{dt} dt + \frac{1}{2} V_C = \frac{1}{2} V_S$

Contoh: Rangkaian RC seri (lanjutan...)

- 1 PD orde 1: $\frac{dV_C}{dt} dt + \frac{1}{2} V_C = \frac{1}{2} V_S = \frac{1}{2} e^{-t}$
- 2 PD tersebut linier dengan $P(t) = \frac{1}{2}$ dan $Q(t) = \frac{1}{2} e^{-t}$
- 3 Faktor pengali: $J = e^{\int P(t) dt} = e^{\int \frac{1}{2} dt} = e^{\frac{1}{2} t}$
- 4
$$V_C = \frac{\int J Q dt}{J} = \frac{\int e^{\frac{1}{2} t} \frac{1}{2} e^{-t} dt}{e^{\frac{1}{2} t}} = \frac{\int \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2} t} dt}{e^{\frac{1}{2} t}} = \frac{-e^{-\frac{1}{2} t} + c}{e^{\frac{1}{2} t}}$$

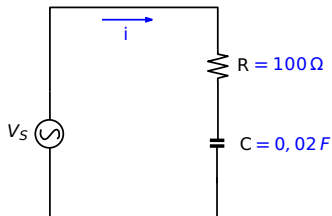
$$= -e^{-t} + ce^{-\frac{1}{2} t}$$
- 5 Arus i : $i = C \frac{dV_C}{dt} = 0,02 \left(e^{-t} - \frac{1}{2} ce^{-\frac{1}{2} t} \right)$

Latihan - input sinusiodal

Jawab:

1

Diberikan rangkaian:



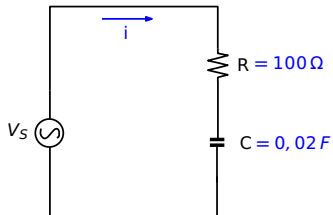
Jika $V(s) = 3 \sin t$,
tentukan tegangan V_C dan
arus i !

Latihan - input DC

Jawab:

1

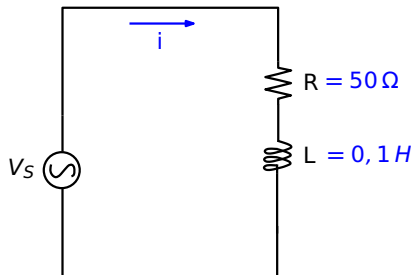
Diberikan rangkaian:



Jika $V(s) = 3$, tentukan tegangan V_C dan arus i !

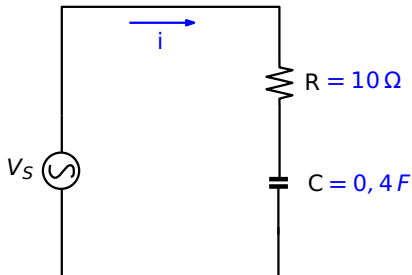
Latihan

1. Diberikan rangkaian RL berikut:



Jika $V(s) = 2 \sin 3t$, tentukan tegangan V_R dan arus i !

2. Diberikan rangkaian RC berikut:



Jika $V(s) = 2 \sin 3t$, tentukan tegangan V_R dan arus i !