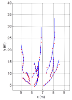
Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom

Fakultas Teknik Elektro

Teknik Telekomunikasi



Persamaan Differensial dan Aplikasi

Metode Pemisahan Variabel

Program Studi Teknik Telekomunikasi

August 26, 2019

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

1. Preliminary

2. Pemisahan Variabel

Tujuan

1. Solusi khusus dengan metode grafis ini sebelumnya bersifat perkiraan
2. Materi dari slide ini bertujuan memaparkan teknik penyelesaian PD 1 dengan cara pemisahan variabel
3. Solusi yang diperoleh bersifat analitik
4. Teknik ini terbatas pada kasus fungsi yang x dan y yang dapat dipisahkan.

Preliminary

1. Sebelum teknik pemisahan variabel, maka diperlukan review terhadap teknik pengintegralan sederhana.
2. Tabel Integrasi:

No	Integrasi
1	$\int dy = y + c$
2	$\int y\ dy = \frac{1}{2}y^2 + c$
3	$\int y^n\ dy = \frac{1}{n+1}y^{n+1} + c$
4	$\int \frac{1}{y+a}\ dy = \ln(y+a) + c$
5	$\int e^{ax}\ dy = \frac{1}{a}e^{ax} + c$
6	$\int \sin ax\ dy = -\frac{1}{a}\cos ax + c$
7	$\int \cos ax\ dy = -\frac{1}{a}\sin ax + c$

Preliminary

1. **Contoh**: akan diselesaikan:
2. $dy = 2x\ dx$
3. **Jawab :** Integrasikan ruas kiri dan kanan:
4. $\int dy = \int 2x\ dx$
5. $y + c_1 = x^2 + c_2$
6. $y + c_1 = x^2 + c_2$
7. atau : $y = x^2 + c$
8. dengan $c = c_2 - c_1$

Preliminary

1. **Contoh** : akan diselesaikan PD sederhana:
2. $dy = 2x\ dx$
3. **Jawab :** Integrasikan ruas kiri dan kanan:
4. $\int dy = \int 2x\ dx$
5. $y + c_1 = x^2 + c_2$
6. $y + c_1 = x^2 + c_2$
7. atau : $y = x^2 + c$
8. dengan $c = c_2 - c_1$

Preliminary

Contoh: diselesaikan:

$\frac{1}{y}\ dy = x\ dx$

Jawab : Integrasikan ruas kiri dan kanan:

$\int \frac{1}{y} dy = \int x\ dx \cdots\cdots$

Preliminary

Contoh lain: diselesaikan:

$\frac{1}{x+1}\,dx = \sin 2t\,dt$

Jawab : $\cdots\cdots$

Teknik Pemisahan Variabel

1. Teknik pemisahan variabel dilakukan dengan menyederhanakan PD bentuk eksplisit atau pun bentuk implisit menjadi bentuk:

$$g(y)dy = f(x)g(x)$$

2. Untuk dapat menjadi bentuk tersebut maka PD harus dapat difaktorkan menjadi

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x)}{g(y)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(y)}$$

3. Dengan kata lain teknik pemisahan variabel dapat dilakukan jika ruas kanan dapat dipisahkan menjadi perkalian fungsi x saja dan fungsi y saja.

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh: dengan teknik pemisahan variabel, selesaikan:

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = 0$$

Jawab:

1. $\frac{dy}{dx} - 2xy = 0 \to \frac{dy}{dx} = 2xy$
2. Suku $\frac{dy}{dx}$ dipisahkan dengan mengalikan kedua ruas dengan dx:
3. $\frac{dy}{dx} = 2xy \to dy = 2xy\ dx \to \frac{1}{y}\ dy = 2x\ dx$
4. Integrasi kiri kanan diperoleh: $\int \frac{1}{y}\ dy = \int 2x\ dx$
5. Disederhanakan :
   $\ln y = x^2 + c \to y = e^{x^2+c} = e^{x^2} \cdot e^c = \hat{c}e^{x^2}$
6. dengan $\hat{c} = e^c$

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain: dengan teknik pemisahan variabel, selesaikan:

$$\frac{dy}{dx} - xy + 2x = 0$$

Jawab:

......

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain: dapatkah PD :

$$\frac{dy}{dx} - xy + 1 = 0$$

diselesaikan dengan teknik pemisahan variabel ?

Jawab:

. . . . . .

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain: dapatkah PD :

$$\frac{dy}{dx} - e^{y+1}x = 0$$

diselesaikan dengan teknik pemisahan variabel ? Jika dapat selesaikan!

Jawab:

$\cdots\cdots$

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain: Selesaikan PD :

$$(1+x)dy - y\,dx = 0$$

dengan teknik pemisahan variabel !

Jawab:

1. Pisahkan suku yang ada sehingga dy diruas kiri dan dx di ruas kanan: $(1+x)\ dy = y\ dx$
2. Pindahkan suku yang mengandung y ke kiri dan suku yang mengandung x ke kanan:

$$\frac{1}{y}\,dy = \frac{1}{1+x}\,dx$$

3. Integrasikan: $\int \frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1}{1+x}\,dx \rightarrow \ln y = \ln(x+1) + c$
4. $y = e^{\ln(x+1)+c} = e^{\ln(x+1)}e^{c} = \hat{c}\,e^{\ln(x+1)} = \hat{c}\,(x+1)$

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain: Selesaikan PD :

$$\frac{x}{y+2}dy - 2dx = 0$$

dengan teknik pemisahan variabel ?

Jawab:

1. ......

Teknik Pemisahan Variabel

Contoh lain lagi: Selesaikan PD :

$$x\,dy - \frac{y+1}{x}\,dx = 0$$

dengan teknik pemisahan variabel ?

Jawab:

1. ......

Teknik Pemisahan Variabel

Kita akan bandingkan solusi dengan metode pemisahan variabel dan metode grafis, pada contoh berikut:

Selesaikan PD :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$

Jawab:

1. Pertama kita selesaikan secara grafis:

Teknik Pemisahan Variabel

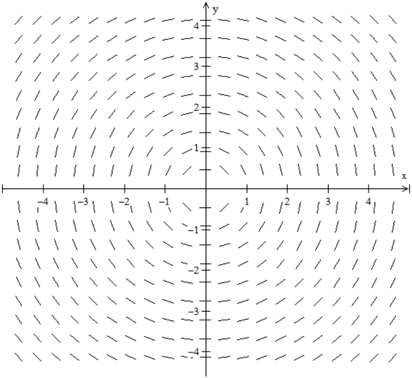
Kita akan bandingkan solusi dengan metode pemisahan variabel dan metode grafis, pada contoh berikut:
Selesaikan PD :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

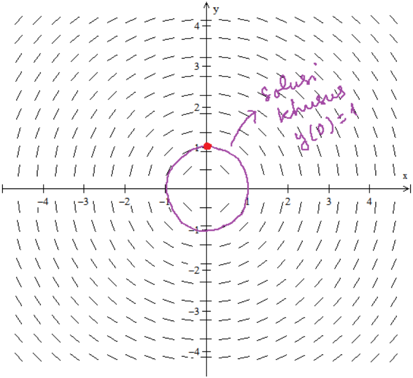
dengan nilai awal $y(0) = 1$
Jawab:

1. Pertama kita selesaikan secara grafis:
2. Gunakan WINPLOT diperoleh solusi umum seperti halaman berikut.

Teknik Pemisahan Variabel



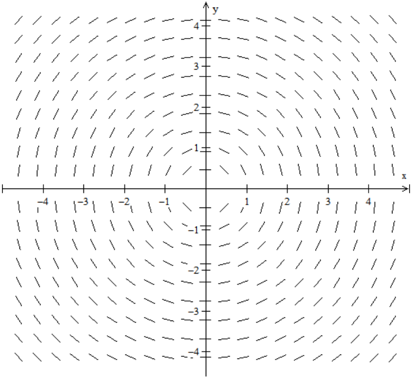
(A) Solusi Umum



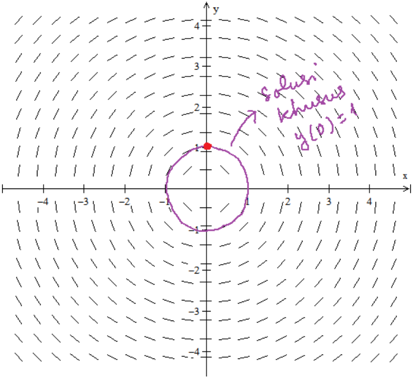
(B) Solusi khusus: $y(0) = 1$

Persamaan solusi khusus akan ditentukan dengan metode pemisahan variabel

Teknik Pemisahan Variabel



(A) Solusi Umum



(B) Solusi khusus: $y(0) = 1$

Persamaan solusi khusus akan ditentukan dengan metode pemisahan variabel

Teknik Pemisahan Variabel

Dengan metode pemisahan variabel
Selesaikan PD :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$
Jawab:

1. Pisahkan komponen y di kiri ruas dan x di kanan :
   $y\ dy = -x\ dx$
2. Integrasi kiri kanan: $\int y\ dy = \int -x\ dx$
3. $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$
4. Masukkan syarat batas: $\frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}0^2 + c \rightarrow c = \frac{1}{2}$
5. Dengan demikian, persamaan kurva adalah :
   $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (lingkaran pusat di O jari-jari 1)

Teknik Pemisahan Variabel

Dengan metode pemisahan variabel
Selesaikan PD : $\frac{dy}{dx} = e^{3x+2y}$ dengan nilai awal $y(0) = 1$
Jawab:

1. ......

Teknik Pemisahan Variabel

Dengan metode pemisahan variabel
Selesaikan PD :

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

dengan nilai awal $y(0) = 1$
Jawab:

1. Pisahkan komponen y di kiri ruas dan x di kanan :
   $y\ dy = -x\ dx$
2. Integrasi kiri kanan: $\int y\ dy = \int -x\ dx$
3. $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + c$
4. Masukkan syarat batas: $\frac{1}{2}1^2 = \frac{1}{2}0^2 + c \rightarrow c = \frac{1}{2}$
5. Dengan demikian, persamaan kurva adalah :
   $\frac{1}{2}y^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \rightarrow x^2 + y^2 = 1$ (lingkaran pusat di O jari-jari 1)

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

1. Suatu persamaan disebut homogen dengan orde n apabila berlaku:
$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x, y)$$
2. **Contoh**: diberikan $f(x, y) = 3x + y$
3. $f(\lambda x, \lambda y) = 3(\lambda x) + (\lambda y) = \lambda(3x + y) = \lambda^1 f(x, y)$
4. dengan demikian $f(x, y)$ bersifat homogen dengan orde 1

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

1. **Contoh berikutnya**: diberikan $f(x,y) = x^2 + 6xy$
2. $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)^2 + 6(\lambda x)(\lambda y) = \lambda^2(x^2 + 6xy) = \lambda^2 f(x,y)$
3. dengan demikian $f(x,y)$ bersifat homogen dengan orde 2

1. **Contoh berikutnya:** diberikan $f(x,y) = 2xy + y$
2. Akan diperiksa apakah $f(x,y)$ homogen:
3. Cek: $f(\lambda x, \lambda y) = 2(\lambda x)(\lambda y) + 2(\lambda y) = \lambda^2 2xy + \lambda y \neq \lambda f(x,y) \neq \lambda^2 f(x,y)$
4. Dengan demikian $f(x,y)$ ini tidak homogen.

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

Cara termudah memeriksa kehomogenan $f(x, y)$ adalah menjumlahkan pangkat setiap sukunya. Jika jumlah pangkat setiap sukunya adalah sama yaitu N, maka $f(x, y)$ adalah homogen dengan orde N.

1. **Contoh**: diberikan $f(x, y) = x^2 + 6xy$
2. Terdapat dua suku pada $f(x, y)$ yaitu x^2 dan $6xy$
3. Jumlah pangkat suku pertama (pangkat x + pangkat y): **2 + 0 = 2**
4. Jumlah pangkat pada suku kedua : **1+1=2**.
5. Karena kedua suku memiliki jumlah pangkat sama yaitu 2, maka $f(x, y)$ ini homogen dengan orde 2.

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

1. **Contoh lain**: diberikan $f(x, y) = x^2y + 6xy^2 + x^3$
2. Terdapat tiga suku pada $f(x, y)$ yaitu x^2y, $6xy^2$, dan x^3
3. Jumlah pangkat suku pertama ; . . . . . .
4. Jumlah pangkat suku kedua : . . . . . .
5. Jumlah pangkat suku ketiga : . . . . . .
6. . . . .

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

Untuk bentuk pecahan, yakni: $f(x,y)\frac{P(x,y)}{Q(x,y)}$, maka $f(x,y)$ bersifat homogen jika

1. $P(x,y)$ homogen dan $Q(x,y)$ juga homogen.
2. Orde dari kehomogenan adalah $M - N$ dengan M adalah orde dari $P(x,y)$ dan N adalah orde dari $Q(x,y)$

1. **Contoh**: diberikan $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+3xy+y^2}$
2. Di sini $P(x,y) = x + y$ adalah homogen dengan orde 1
3. $Q(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$ adalah homogen dengan orde 2.
4. Dengan demikian $f(x,y)$ adalah homogen dengan orde -1

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

Definisi: Suatu PD dengan bentuk

$$M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$$

disebut **homogen**, jika $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah **homogen** dengan **orde yang sama**.

1. **Contoh** : PD

$$(x + y)\, dx + (2x - y)dy = 0$$

adalah PD homogen, karena $M(x, y)$ dan $N(x, y)$ adalah homogen dan berorde 1.

2. **Contoh lain:** Periksa pula apakah PD

$$(x^2 + y^2)\, dx + (x + y)\, dy = 0$$

homogen?

Reduksi persamaan Homogen ke bentuk *separable*

Jika **PD**: $M(x, y)\, dx + N(x, y)\, dy = 0$ **homogen**, maka PD tersebut dapat jadikan bentuk *separable* dengan substitusi:

$$y = ux$$

dan

$$dy = u\, dx + x\, du$$

Dari $y = ux$, diperoleh:

$$u = \frac{y}{x}$$

Contoh

Selesaikan PD: $(x + y)\,dx + (x - y)\,dy = 0$

Jawab:

1. $M(x, y) = x + y \implies$ homogen orde 1
2. $N(x, y) = x - y \implies$ homogen orde 1
3. Dengan demikian PD ini homogen orde 1
4. Misal: $y = ux$, maka $dy = u\,dx + x\,du$. Substitusi ke PD asal diperoleh:
5. $(x + ux)\,dx + (x - ux)(u\,dx + x\,du) = 0$
6. $x\,dx + ux\,dx + ux\,dx + x^2\,du - u^2x\,dx - ux^2\,du = 0$
7. $(x + 2ux + u^2x)\,dx + (x^2 + ux^2)du = 0$
8. $x(1 + 2u + u^2)\,dx + x^2(1 + u)du = 0$
9. bagi kedua ruas dengan x:

Contoh

Lanjutan

9. $(1 + 2u + u^2)\, dx + x(1 + u)du = 0$
10. sederhanakan lebih lanjut diperoleh:
11. $\frac{1}{x}\, dx + \frac{1+u}{1+2u+u^2}\, du = 0$
12. $\frac{1}{x}\, dx + \frac{1+u}{(1+u)^2}\, du = 0$
13. $\frac{1}{x}\, dx + \frac{1}{1+u}\, du = 0$
14. $\frac{1}{1+u}\, du = -\frac{1}{x}\, dx$, integrasikan ruas kiri dan kanan diperoleh:
15. $\ln(1 + u) = -\ln(x) + c = \ln\frac{1}{x} + c$
16. $1 + u = e^{\ln\frac{1}{x}+c} = e^c \cdot e^{\ln\frac{1}{x}} = e^c(\frac{1}{x}) \implies u = \frac{e^c}{x} - 1$
17. $u = \frac{y}{x} \implies \frac{y}{x} = \frac{e^c}{x} - 1 \implies y = e^c - x = \bar{c} - x$

Contoh

Selesaikan PD: $(x + 3y)\, dx + (3x - y)\, dy = 0$

Jawab:

1. ....

Latihan

Dengan metode pemisahan variabel, selesaikan:

1. $\frac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$
2. $y\frac{dy}{dx} + 2x = 0$
3. $\frac{dy}{dx} - 2y = 0$
4. $x^2\frac{dy}{dx} = y - xy$, dengan kondisi awal $y(0) = 2$

Selesaikan PD homogen berikut:

1. $\frac{x+y}{x-y}\,dx + \frac{2x+y}{x-y}\,dy = 0$