

Team Dosen PDA

S1-TT

Slide 02: Persamaan Differensial Orde 1: Solusi Umum dan Solusi Khusus serta Medan Arah

Program Studi Teknik Telekomunikasi

19 Agustus 2019

Universitas Telkom
Fakultas Teknik Elektro
Telekomunikasi



Persamaan
Differensial
dan
Aplikasi

- 1 Implisit - Eksplisit
- 2 Solusi Umum dan Khusus
- 3 Grafis

Persamaan Differensial

- 1 Persamaan differensial adalah persamaan melibatkan turunan atau differensial

- 2 Contoh:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3$$

- 3 Contoh lainnya:

$$3\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

- 4 Contoh lainnya:

$$2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 6xy = 0$$

Bentuk Implisit

- 1 Persamaan differensial orde 1 bentuk Implisit dinyatakan dengan :

$$F(x, y, \frac{dy}{dx}) = 0$$

- 2 Ciri khas bentuk implisit adalah: ruas kiri bercampur dan ruas kanan 0.
- 3 Contoh :

$$3\frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

- 4 Contoh lainnya:

$$\frac{dy}{dx} + 6xy - 3 = 0$$

- 5

Bentuk Eksplisit

- 1 Persamaan differensial orde 1 bentuk Implisit dinyatakan dengan :

$$\frac{dy}{dx} = G(x, y)$$

- 2 Ciri khas bentuk implisit adalah: ruas kiri hanya ada suku $\frac{dy}{dx}$.
- 3 Contoh :

$$\frac{dy}{dx} = -2y$$

- 4 Contoh lainnya:

$$\frac{dy}{dx} = 6xy + 9x + 9$$

- 5

Latihan Kecil 1

Tentukan mana yang masuk implisit dan mana eksplisit

1 $x + \frac{dy}{dx} = 0$

2 $\frac{dy}{dx} = 6x^2 - x$

3 $2\frac{dy}{dx} = xy$

4 $2\frac{dy}{dx} + 4x = 5$

Ubahlah bentuk implisit berikut ke bentuk eksplisit:

1 $2x + 3\frac{dy}{dx} = 0$

2 $4\frac{dy}{dx} - 6x^2 - x = 0$

3 $-3\frac{dy}{dx} - 2y = 0$

Ubahlah bentuk eksplisit berikut ke bentuk implisit:

1 $\frac{dy}{dx} = 5xy - 6$

2 $\frac{dy}{dx} = \frac{2}{3}y - 5 = 0$

Menerjemahkan permasalahan ke dalam persamaan differensial orde 1

- 1 Turunan $\frac{dy}{dx}$ menyatakan laju perubahan y terhadap x .
- 2 Turunan $\frac{dy}{dt}$ menyatakan laju perubahan y terhadap t
- 3 dan seterusnya.
- 4 Sebagai contoh, laju perubahan suhu (T) terhadap waktu (t) dapat dinyatakan sebagai $\frac{dT}{dt}$
- 5 Jika laju perubahan temperatur (T) terhadap waktu (t) adalah sama dengan 5 kali temperatur saat ini (T), maka persamaan differensialnya dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dT}{dt} = 5T$$

Menerjemahkan permasalahan ke dalam persamaan differensial orde 1

Contoh lain:

- 1 Jika laju perubahan penduduk (P) terhadap waktu (t) adalah sebanding dengan jumlah penduduk saat ini (P)
- 2 maka persamaan differensialnya dapat dinyatakan sebagai:

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

- 3 k menyatakan suatu konstanta.
- 4 Hukum Newton di bidang transfer panas menyatakan bahwa Laju perubahan temperature suatu benda (T) terhadap waktu (t) sebanding dengan selisih antara temperatur benda (T) dengan temperatur lingkungan T_L . Jika temperatur lingkungan $T_L = 30^{\circ}$.

Menerjemahkan permasalahan ke dalam persamaan differensial orde 1

Contoh lain:

- 1 Hukum Newton di bidang transfer panas menyatakan bahwa Laju perubahan temperature suatu benda (T) terhadap waktu (t) sebanding dengan selisih antara temperatur benda (T) dengan temperatur lingkungan T_L . Jika temperatur lingkungan $T_L = 30^{\circ}$.
- 2 Persamaan differensialnya adalah
- 3
- 4

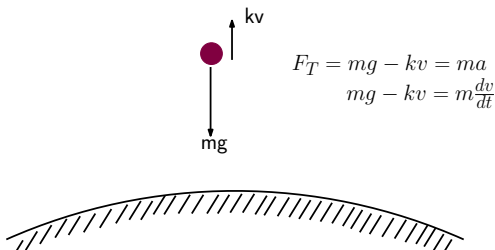
1

¹Catatan: pada contoh-contoh yang diberikan, penerjemahan masalah sederhana umumnya menjadi persamaan differensial eksplisit.

Menerjemahkan permasalahan ke dalam persamaan differensial orde 1

Contoh lainnya: Permasalahan **benda jatuh bebas**

- 1 Benda jatuh bebas dipengaruhi dua gaya: gaya gravitasi (F_g) dan gaya gesek (F_k)
- 2 $F_T = F_g - F_k$
- 3 F_T adalah gaya total pada benda
- 4 $m \frac{dv}{dt} = mg - kv$, sehingga PD orde 1 eksplisitnya:
- 5 $\frac{dv}{dt} = g - \frac{k}{m}v$



Menerjemahkan permasalahan ke dalam persamaan differensial orde 1

- 1 Tentukan persamaan differensial yang mewakili benda jatuh bebas,
- 2 Massa benda (m) 10 kg.
- 3 koefisien gesek k sebesar 0, 1
- 4 percepatan gravitasi $g = 9,8 \text{ m/s}^2$
- 5 Jawab:
- 6 $F_T = m \frac{dv}{dt} = mg - kv \rightarrow 10 \frac{dv}{dt} = 10 \times 9,8 - 0,1 \times v$

- 7 Atau :

$$\frac{dv}{dt} = 9,8 - 0,01v$$

Materi aplikasi ini akan dipelajari lebih lanjut pada pertemuan yang akan datang.

Solusi PD : Solusi Umum dan Solusi Khusus

- 1 Solusi dari PD adalah **suatu fungsi** yang jika disubstitusikan ke PD, maka persamaan PD terpenuhi.
- 2 Tinjau PD eksplisit:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

- 3 solusi PD tersebut adalah fungsi:

$$y = x^2 + c$$

- 4 Karena: $y = x^2 + c$ menghasilkan: $\frac{dy}{dx} = 2x$
- 5 dengan demikian terpenuhi bahwa: $\frac{dy}{dx} = 2x$

Solusi PD : Solusi Umum dan Solusi Khusus

- 1 Nilai c pada $y = x^2 + c$ sebagai solusi dari PD dapat bernilai berapa saja.

Misal :

$c = 1$ menghasilkan solusi $y = x^2 + 1$

$c = 2$ menghasilkan solusi $y = x^2 + 2$

dsb.

- 2 Solusi $y = x^2 + c$ disebut sebagai **solusi umum**
- 3 Solusi $y = x^2 + 1$, atau $y = x^2 + 2$, dsb disebut sebagai **solusi khusus**
- 4 Solusi umum dan solusi khusus ini terlihat dengan jelas pada kurva solusi

Solusi PD : Solusi Umum dan Solusi Khusus

- 1 Nilai c pada $y = x^2 + c$ sebagai solusi dari PD dapat bernilai berapa saja.

Misal :

$c = 1$ menghasilkan solusi $y = x^2 + 1$

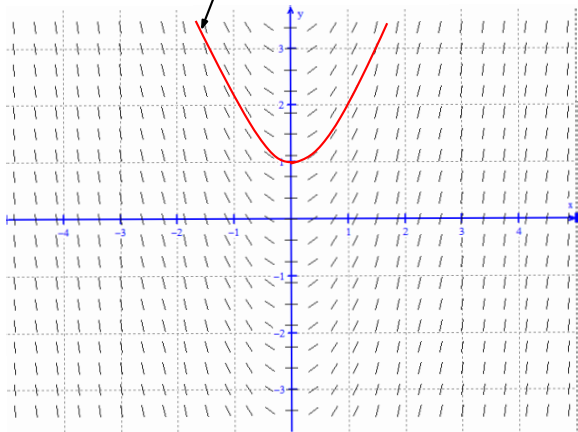
$c = 2$ menghasilkan solusi $y = x^2 + 2$

dsb.

- 2 Solusi $y = x^2 + c$ disebut sebagai **solusi umum**
- 3 Solusi $y = x^2 + 1$, atau $y = x^2 + 2$, dsb disebut sebagai **solusi khusus**
- 4 Solusi umum dan solusi khusus ini terlihat dengan jelas pada kurva solusi

Solusi PD : Solusi Umum dan Solusi Khusus

contoh solusi khusus: $y = x^2 + 1$



solusi umum $y = x^2 + c$

Masalah nilai batas (MNB)

- 1 Untuk memilih satu solusi khusus dari solusi umum, maka diperlukan suatu nilai batas (Masalah Nilai Batas = MNB).
- 2 **Contoh:**
- 3 Tentukan solusi dari PD 1: $\frac{dy}{dx} = 2x$
dengan syarat batas bahwa: $y(1) = 3$
- 4 **Jawab:**
- 5 Solusi umum dari PD 1 tersebut adalah

$$y = x^2 + c$$

- 6 Oleh karena ditentukan/dibatasi bahwa saat $x = 1$, $y = 3$, masukkan ke solusi umum:

$$3 = 1^2 + c$$

- 7 diperoleh: $c = 2$
- 8 Dengan demikian solusi khusus : $y = x^2 + 2$

Masalah Nilai Batas

Contoh lain:

- 1 Diketahui bahwa solusi umum dari suatu PD orde 1:

$$\frac{dy}{dx} = y$$

adalah

$$y = c \cdot e^{-x}$$

- 2 jika diberikan syarat batas bahwa: $y(0) = 5$
- 3 Tentukan solusi khusus yang memenuhi syarat batas tersebut.
- 4 **Jawab:**
- 5

Masalah Nilai Batas

Contoh lain lagi:

- 1 Diketahui bahwa solusi umum dari suatu PD orde 1:

$$\frac{dy}{dx} = 5$$

adalah

$$y = 5x + c$$

- 2 jika diberikan syarat batas bahwa: $y(-1) = 4$
- 3 Tentukan solusi khusus yang memenuhi syarat batas tersebut.
- 4 **Jawab:**
- 5

Masalah Nilai Awal

- 1 Di samping istilah Masalah Nilai Batas (MNB), terdapat juga istilah Masalah Nilai Awal (MNA).
- 2 MNA lebih terbatas pada nilai $x = 0$ atau $t = 0$
- 3 Biasanya MNA lebih terkait dengan variabel waktu t .
- 4 Contoh MNA:
- 5 Tentukan solusi PD Orde 1 terkait kecepatan:

$$\frac{dv}{dt} = 2t$$

dengan syarat $v(0) = 3$.

- 6 Syarat $v(0) = 3$ di atas termasuk MNA. Karena diketahui kecepatan awal ($t = 0$) adalah 3 (m/s).
- 7 MNA adalah bentuk khusus MNB yang spesifik membatasi kondisi pada $x = 0$ atau $t = 0$. Sedang MNB x atau t bebas.

Latihan kecil 2

- 1 Diketahui bahwa solusi umum dari suatu PD orde 1:

$$\frac{dy}{dt} = t + 2$$

adalah

$$y = \frac{1}{2}t^2 + 2t + c$$

- 2 dengan MNA: $y(0) = 5$
- 3 Tentukan solusi khusus yang memenuhi syarat batas tersebut.
- 4 **Jawab:**
- 5

Solusi grafis dari PD orde 1

Solusi dari suatu PD dapat digambar secara grafis

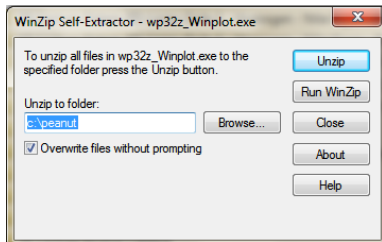
- 1 Plotting dapat dilakukan secara manual
- 2 atau menggunakan perangkat lunak (contoh software: WINPLOT)
- 3 pada bagian ini kita manfaatkan perangkat lunak WINPLOT (Unduh di: http://faculty.madisoncollege.edu/alehnen/winptut/Install_Winplot.html)
- 4 WINPLOT dikembangkan oleh Prof. Richard Parris, instruktur matematika pada Phillips Exeter Academy di Exeter, New Hampshire, Amerika



- 5 Perangkat lunak ini adalah open source (free)

Solusi grafis dari PD orde 1

- 1 Unduh WINPLOT pada webnya, dan file yang diunduh adalah `wp32z_Winplot.exe`
- 2 Double klik file ini dan ekstraksi ke folder default `c:\peanut`.



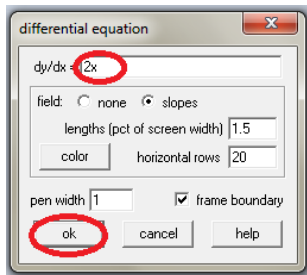
- 3 Pergi ke folder `c:\peanut` dan double klik file `winplot.exe`

Name	Date modified	Type	Size
<input checked="" type="checkbox"/> winplot.exe	9/13/2012 10:07 AM	Application	1,908 KB

Solusi grafis dari PD orde 1

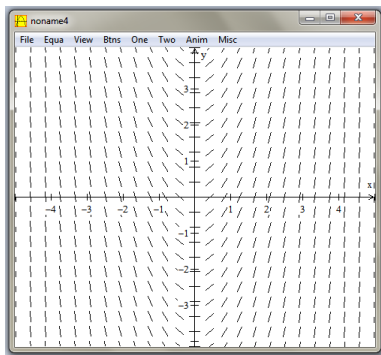
- 1 Setelah double klik *winplot.exe*, maka program **winplot** akan aktif
- 2 Untuk memulai plot persamaan differensial, klik menu:

Menu → 2-dim → equa → Differential → $dy/dx \dots$
- 3 Ketikkan **2x** pada tab **dy/dx** seperti gambar untuk memplot solusi grafis $dy/dx = 2x$. Klik **OK** untuk memplot.



Solusi grafis dari PD orde 1

- 1 Hasil plot seperti gambar:



- 2 Sekarang cobalah memplot solusi grafis dari $\frac{dy}{dx} = -x + 3$

Latihan/PR1

- 1 Tentukan mana bentuk implisit dan mana bentuk eksplisit

1 $\frac{dy}{dx} = 12x - 3y + 5$

2 $2x + 3y - \frac{dy}{dx} - 5 = 0$

3 $5(v - 4) + \frac{dv}{dt} = 0$

- 2 Diketahui $y = c \cdot e^{2t}$ adalah solusi dari PD $\frac{dy}{dt} = -2y$. Jika $y(2) = e^8$, tentukan solusi khusus dari PD tersebut.

- 3 Dengan menggunakan WINPLOT, *print*-kan solusi grafis dari PD:

1 $\frac{dy}{dx} = 12x - 3y + 5$

2 $2x + 3y - \frac{dy}{dx} - 5 = 0$