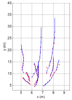
Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom

Fakultas Teknik Elektro

Teknik Telekomunikasi



Variabel

Kompleks

Penyelesaian PD eksak

Program Studi Teknik Telekomunikasi

August 18, 2019

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan

Materi pada slide ini memaparkan tentang:

1. PD eksak
2. Solusi PD eksak
3. Mengeksakkan PD tak Eksak

Total Differensial

1. Konsep PD eksak dimulai dari konsep Total Differensial
2. Suatu fungsi
$$F(x, y) = c$$
memiliki total differensial dF yaitu:
$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 0$$
3. Contoh: $F(x, y) = x^3y^2 + \sin y = c$
4. maka :
$dF = \frac{\partial F}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F}{\partial y}\,dy = 3x^2y^2\,dx + (2x^3y + \cos y)\,dy = 0$
5. Dengan lain perkataan: PD
$3x^2y^2\,dx + (2x^3y + \cos y)\,dy = 0$
secara eksak berasal dari persamaan:
$F(x, y) = x^3y^2 + \sin y = c$

Total Differensial

Contoh lain:

1. diberikan : $F(x, y) = xy^2 = c$
   tentukan PD yang diwakili oleh $F(x, y)$ yang diturunkan dari total differensial dF
2. Jawab : $dF = \cdots\cdots$

Pemeriksaan ke-eksak-an PD

1. Pada contoh sebelumnya: PD
   $3x^2y^2\,dx + (2x^3y + \cos y)\,dy = 0$
   secara eksak berasal dari persamaan asal:
   $F(x,y) = x^3y^2 + \sin y = c$
2. Terdapat juga PD yang **tidak memiliki** persamaan asal.
3. Contoh: PD $y\,dx + 2xy\,dy = 0$
   tidak memiliki persamaan asal **F(x,y)**.
4. PD yang **tidak memiliki persamaan** asal disebut **PD tidak eksak**.
5. Untuk memeriksa ke-eksak-an PD, maka digunakan sifat bahwa:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}$$

Pemeriksaan ke-eksak-an PD

1. Ditinjau suatu PD :

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0$$

2. Jika PD ini berasal dari fungsi $F(x, y)$, maka berlaku:

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y)$$

dan

$$\frac{\partial F}{\partial y} = N(x, y)$$

3. Oleh karena:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} \rightarrow \frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial x})}{\partial y} = \frac{\partial(\frac{\partial F}{\partial y})}{\partial x} \rightarrow \frac{\partial(M(x, y))}{\partial y} = \frac{\partial(N(x, y))}{\partial x}$$

Pemeriksaan ke-eksak-an PD

1. Dapat disimpulkan bahwa jika terpenuhi

$$\frac{\partial\, M(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial\, N(x,y)}{\partial x}$$

maka PD

$$M(x,y)\, dx + N(x,y)\, dy = 0$$

bersifat eksak.

2. **Contoh:** Periksa apakah PD:

$$y\, dx + 2xy\, dy = 0$$

bersifat eksak.

3. **Jawab**: $M(x,y) = y \rightarrow \frac{\partial M}{\partial y} = 1$ dan $N(x,y) = 2xy \rightarrow \frac{\partial N}{\partial x} = 2y$.

4. Karena secara umum $\frac{\partial M}{\partial y} \neq \frac{\partial N}{\partial x}$ maka PD ini tidak eksak.

Pemeriksaan ke-eksak-an PD

1. Periksa apakah PD berikut eksak:

$$5(x + y)\,dx + 5x\,dy = 0$$

2. **Jawab:** ......

Pemeriksaan ke-eksak-an PD

1. Periksa apakah PD berikut eksak:

$$x\frac{dy}{dx} + y + 4 = 0$$

2. **Jawab:** ......

Latihan kecil

Contoh: Periksa apakah PD berikut bersifat eksak:

$$2xy\,dx + (x^2 - 1)\,dy = 0$$

1. Jawab: ......

Latihan kecil

Contoh: Periksa apakah PD berikut bersifat eksak:

$$(4x^3 + x^2 - y^2)dx + 2xydy = 0$$

1. Jawab:

Menyelesaikan PD Eksak

1. Penyelesaian dari PD eksak $M(x,y)\,dx + N(x,y)\,dy = 0$
2. adalah fungsi $F(x,y) = c$
3. untuk mencari $F(x,y)$, maka dapat dimulai dari

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M(x,y)$$

4. Integrasi ruas kiri dan kanan diperoleh:

$$\int \frac{\partial F}{\partial x}\,dx = \int M(x,y)\,dx$$

5. Integrasi kiri memberikan $F(x,y)$ dan integrasi kanan memberikan $H_M(x,y) + f(y)$
6. $H_M(x,y)$ adalah hasil integrasi dari $M(x,y)$ dan $f(y)$ adalah fungsi dalam y

Menyelesaikan PD Eksak

1. Untuk memperoleh $f(y)$, turunkan $F = H_M(x, y) + f(y)$ tadi terhadap y:

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial H_M}{\partial y} + f'(y) = N(x, y)$$

2. Dengan menyamakan setiap suku

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial H_M}{\partial y} + f'(y) = N(x, y)$$

   maka diperoleh $f'(y)$

3. Integrasi $f'(y)$ terhadap y untuk memperoleh $f(y)$
4. Fungsi $F(x, y)$ dengan demikian diperoleh lengkap sebagai:

$$F(x, y) = H_M(x, y) + f(y)$$

5. Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh berikut.

Menyelesaikan PD eksak

Dengan teknik eksak, selesaikan PD berikut:
$(2x + y)\, dx + (5 + x)\, dy = 0$

1. **Jawab**: Pada soal ini, diperoleh $M(x, y) = 2x + y$ dan $N(x, y) = 5 + x$
2. $\frac{\partial M}{\partial y} = 1$ dan $\frac{\partial N}{\partial x} = 1$. Jadi $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} \rightarrow$ *PD bersifat eksak*
3. Diketahui bahwa $\frac{\partial F}{\partial x} = M(x, y) = 2x + y$
4. Integrasi kedua ruas: $\int \frac{\partial F}{\partial x}\, dx = F(x, y) = \int M(x, y) dx = \int 2x + y\, dx = x^2 + xy + f(y)$
5. pada hasil terakhir: $H_M(x, y) = x^2 + xy$
6. Turunkan $F(x, y)$ yang diperoleh terhadap y dan samakan dengan $N(x, y)$:
7. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial [x^2 + xy + f(y)]}{\partial y} = x + f'(y) = N(x, y) = (5 + x)$

Menyelesaikan PD eksak

Lanjutan...

8. $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial[x^2+xy+f(y)]}{\partial y} = x + f'(y) = N(x,y) = (5+x)$ atau
9. $x + f'(y) = (5+x)$, sehingga $f'(y) = 5$
10. Integrasi $f'(y)$ terhadap y diperoleh:
    $\int f'(y)\, dy = f(y) = \int 5\, dy = 5y + c$
11. Dengan demikian solusi dari PD adalah:
    $F(x,y) = H_M(x,y) + f(y) = x^2 + xy + 5y + c$
12. c suatu konstan.
13. Setelah kita dapat solusi PD, kita dapat test lagi total differensial dari $F(x,y)$ haruslah menghasilkan PD semula:
    $dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y} dy = 0$ atau
    $(2x+y)dx + (x+5)dy = 0$ (Seperti persamaan PD semula)

Latihan kecil

Dengan metode eksak, selesaikan:

$(3x^2y + 2x)\,dx + (x^3 + 2y + 5)\,dy = 0$

1. **Jawab:** ......

Latihan kecil

Dengan metode eksak, selesaikan:

$y^2 \sin x \; dx + (\cos y - 2y \cos x) \; dy = 0$

1. **Jawab:** ......

Mengeksakkan PD

Pada beberapa kasus, suatu PD tidak eksak, dapat dieksakkan dengan menggunakan suatu faktor pengali. Tinjau contoh berikut:

1. $xy\ dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\ dy = 0$
2. adalah PD yang tidak eksak, karena

   $$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial\ 2x}{\partial y} = x \neq \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial x^2 + 3y^2 - 20}{\partial x} = 4x$$

3. Kita *mungkin* dapat mengalikan kedua ruas PD tersesbut dengan suatu faktor $\mu(x)$ (atau $\mu(y)$) yang disebut faktor pengali (FP), sehingga PD hasil modifikasi:

   $$\mu(x)\ xy\ dx + \mu(x)\ (2x^2 + 3y^2 - 20)\ dy = 0$$

4. Secara umum, dengan mengalikan Faktor Pengali (FP), diperoleh: $\mu(x)\ M(x,y)\ dx + \mu(x)\ N(x,y)\ dy = 0$

Mengeksakkan PD

1. Setelah diberi Faktor Pengali (FP), diharapkan PD: $\mu(x)\ M(x,y)\ dx + \mu(x)\ N(x,y)\ dy = 0$ bersifat eksak, oleh karena itu berlaku:
2. $\frac{\partial\ \mu(x)M(x,y)}{\partial\ y} = \frac{\partial\ \mu(x)N(x,y)}{\partial\ x}$
3. **atau:** $\mu(x)\ \frac{\partial\ M(x,y)}{\partial y} = \mu'(x)\ N(x,y) + \mu(x)\frac{\partial\ N(x,y)}{\partial x}$
4. **atau:** $\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N}$
5. Integrasikan relatif terhadap x, diperoleh: $\int \frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\ dx = \int\ \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N}\ dx \rightarrow \ln\mu(x) = \int\ \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial y}}{N}\ dx$
6. Dari hasil terakhir, kita peroleh faktor pengali: $\mu(x) = e^{\int\ \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dx} = e^{\int\ T_x\ dx}$, dengan $T_x = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} = \frac{M_y - N_x}{N}$

Mengeksakkan PD

1. Jika FP $\mu(x)$ tidak dapat diselesaikan (masih memuat variabel y), maka alternatifnya, digunakan FP $\mu(y)$ yaitu: $\mu(y) = e^{\int \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} dy} = e^{\int T_y \, dy}$, dengan $T_y = \frac{\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}}{M} = \frac{N_x - M_y}{M}$
2. Untuk mengetes apakah faktor pengali suatu PD non-eksak adalah $\mu(x)$ atau $\mu(y)$ adalah sebagai berikut:
3. Misalkan $T_x = \frac{M_y - N_x}{N}$ dan $T_y = \frac{N_x - M_y}{M}$
4. Jika T_x hanya fungsi x saja, maka faktor pengali PD adalah $\mu(x)$
5. Jika T_y hanya fungsi y saja, maka faktor pengali PD adalah $\mu(y)$

Mengeksakkan PD

1. Untuk mengilustrasikan bagaimana FP dipilih dan dihitung, mari membahas contoh berikut:
2. Diberikan PD: $x^2\,dx + (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$
3. Eksakkan dan selesaikan PD tersebut!
4. **Jawab:** dalam kasus ini: $M = xy \implies M_y = x$ dan $N = 2x^2 + 3y^2 - 20 \implies N_x = 4x$
5. $T_x = \frac{My - Nx}{N} = \frac{x - 4x}{2x^2 + 3y^2 - 20} = \frac{-3x}{2x^2 + 3y^2 - 20}$
6. $T_y = \frac{Nx - My}{M} = \frac{4x - x}{xy} = \frac{3x}{xy} = \frac{-3}{y}$
7. Oleh karena T_y hanya mengandung fungsi y saja, maka $\mu(y)$ dijadikan FP.

Mengeksakkan PD

Lanjutan

8. $\mu(y) = e^{\int Ty\,dy} = e^{\int \frac{3}{y}\,dy} = e^{3\ln y} = e^{\ln y^3} = y^3$
9. Kalikan kedua ruas PD semula dengan $\mu(y)$ diperoleh: $y^3 \cdot xy\,dx + y^3 \cdot (2x^2 + 3y^2 - 20)\,dy = 0$
10. Disederhanakan: $xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0$
11. PD baru : $xy^4\,dx + (2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3)\,dy = 0$ bersifat eksak karena: $M_y = 4xy^3 = N_x = 4xy^3$
12. PD ini diselesaikan: $F_x = M(x,y) = xy^4$, integrasikan ruas kiri dan kanan: $\int F_x dx = F(x,y) = \int xy^4\,dx = \frac{1}{2}x^2y^4 + g(y)$

Mengeksakkan PD

Lanjutan

1. Turunkan $F(x,y)$ terhadap y dan samakan dengan $N(x,y)$:

   $F_y = 2x^2y^3 + g'(y) = N(x,y) = 2x^2y^3 + 3y^5 - 20y^3 \implies g'(y) = 3y^5 - 20y^3$

2. Integrasi $g'(y)$ terhadap y, diperoleh: $\int g'(y)dy = g(y) = \int 3y^5 - 20y^3\,dy = \frac{3}{6}y^6 - \frac{20}{4}y^4 + c = \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c$

3. Dengan demikian solusi PD adalah :

$$F(x,y) = \frac{1}{2}x^2y^4 + \frac{1}{2}y^6 - 5y^4 + c$$

Latihan kecil

Eksakkan PD berikut dan selesaikan:

$$(3xy + y^2)\,dx + (x^2 + xy)\,dy = 0$$

1. Jawab: ......

Latihan kecil

Eksakkan PD berikut dan selesaikan:

$$y\,dx + (2x - ye^{y})\,dy = 0$$

1. Jawab: ......

Latihan

Periksa apakah PD berikut eksak:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{-2x-3}{2y-2}$
2. $(3x^2 - 2xy + 2)\,dx + (6y^2 - x^2 + 3)\,dy = 0$
3. $(e^x \sin y - 2y \sin x)\,dx + (e^x \cos y + 2\cos x)\,dy = 0$

Dengan menggunakan metode eksak, selesaikan PD berikut:

1. $(2x - y)\,dx + (2y - x)\,dy = 0$
2. $(9x^2 + y - 1)\,dx - (4y - x)\,dy = 0$ dengan kondisi syarat batas $y(1) = 0$

Dengan menggunakan faktor pengali, jadikan PD berikut eksak dan selesaikan:

1. $x^2y^3\,dx + x(1 + y^2)\,dy = 0$
2. $(x + 2)\sin y\,dx + x\cos y\,dy = 0$