

Team Dosen PDA

S1-TT

Universitas Telkom  
Fakultas Teknik Elektro  
Jurusan Telekomunikasi



Persamaan  
Diferensial  
dan  
Aplikasi

# Solusi Grafis

Program Studi Teknik Telekomunikasi

19 Agustus 2019

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

- 1 Solusi Grafis
- 2 PD autonom
- 3 Phase Portrait

## Solusi Grafis

- 1 Pada slide sebelumnya, telah dibahas perangkat lunak untuk solusi grafis PD orde 1.
- 2 Pada slide ini, akan dibahas kembali solusi grafis, baik solusi umum mau pun solusi khusus.
- 3 Untuk menyelesaikan PD dengan metode grafis, persamaan PD harus diubah ke bentuk eksplisit:

$$\frac{dy}{dx} = g(x, y)$$

- 4 Setelah itu, solusi umum diperoleh dengan plot grafis misalnya dengan cara manual mau pun WINPLOT
- 5 solusi umum merupakan kumpulan semua garis yang berpola garis singgung (disebut juga sebagai Medan Arah)
- 6 solusi khusus merupakan salah satu dari garis yang memenuhi syarat batas MNB.

# Solusi Grafis

## Contoh:

- 1 Dengan metode grafis, plotlah solusi umum dari PD 1

$$\frac{dy}{dx} + xy = 0$$

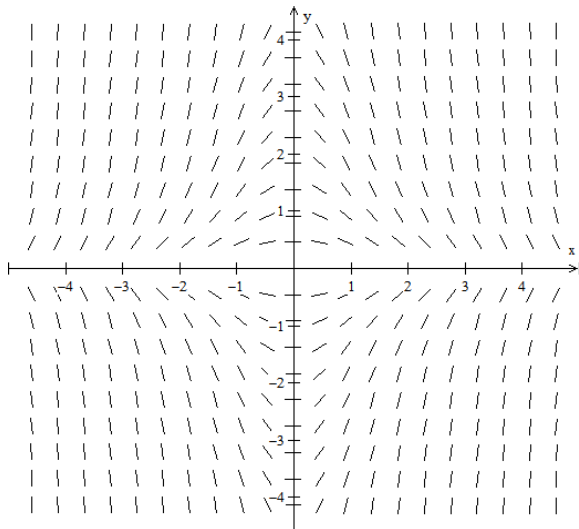
- 2 Jika  $y(2) = 1$ , sketsalah kurva solusi khusus dari PD tersebut!
- 3 Gunakan **WINPLOT** sebagai alat bantu.
- 4 **Jawab:**
- 5 Ubah dulu PD ke bentuk eksplisit:

$$\frac{dy}{dx} = -xy$$

- 6 Dengan menggunakan WINPLOT, diperoleh hasil:

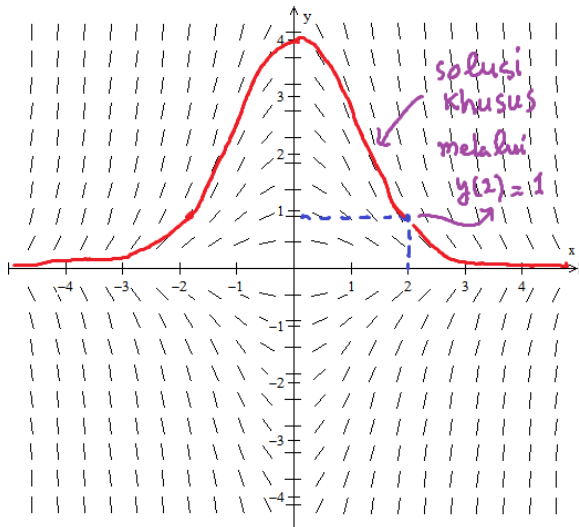
# Solusi Grafis

## Kumpulan kurva Solusi umum



# Solusi Grafis

Solusi khusus memenuhi  $y(2)=1$



# Solusi Grafis

## Latihan Kecil 3

- 1 Dengan metode grafis, plotlah solusi umum (Medan Arah) dari PD 1

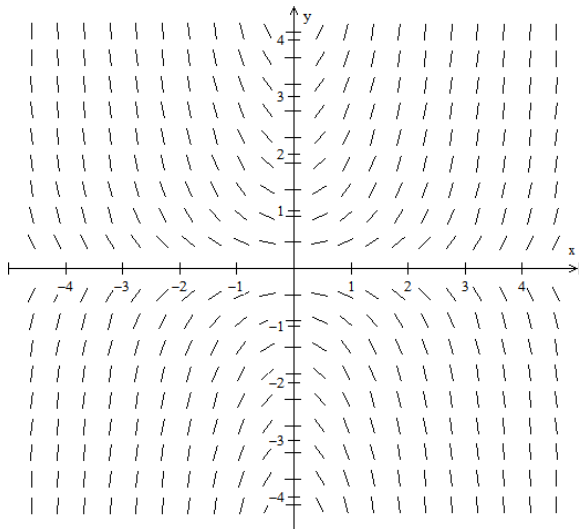
$$\frac{dy}{dx} - xy = 0$$

- 2 Jika diberikan syarat batas  $y(1) = 1$ , sketsalah kurva solusi khusus dari PD tersebut!
- 3 Gunakan **WINPLOT** sebagai alat bantu.
- 4 **Jawab:**
- 5 Ubah dulu PD ke bentuk eksplisit:  
.....

- 6 Dengan menggunakan WINPLOT, diperoleh hasil:  
.....

# Solusi Grafis

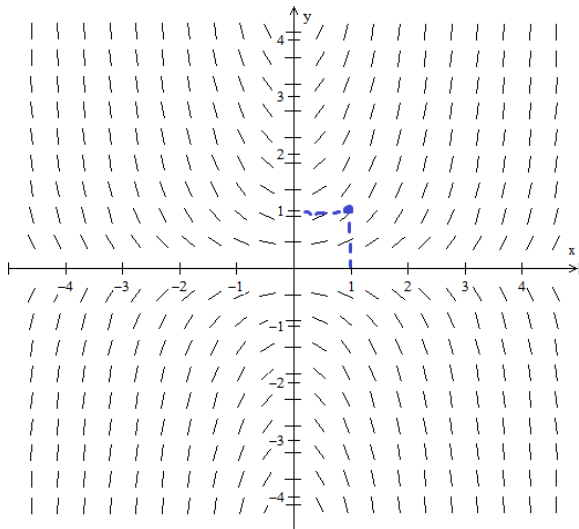
## Solusi umum...





# Solusi Grafis

Sketsa kurva solusi khusus yang memenuhi  $y(1)=1$  ...



# Solusi Grafis

## Latihan Kecil 4 / PR 1

- 1 Dengan metode grafis, plotlah medan arah dari PD 1

$$\frac{dy}{dt} - yt^2 = 0$$

- 2 Jika diberikan syarat batas  $y(1) = 1$ , sketsalah kurva solusi khusus dari PD tersebut!
- 3 Gunakan **WINPLOT** sebagai alat bantu.
- 4 **Jawab:**
- 5 Ubah dulu PD ke bentuk eksplisit:  
.....

- 6 Dengan menggunakan WINPLOT, diperoleh hasil:  
.....

## PD orde 1 autonom

- 1 PD orde 1 autonom memiliki bentuk:

$$\frac{dy}{dx} = f(y)$$

- 2 Dengan kata lain, turunan dari  $y$  hanya fungsi dari  $y$  saja.

- 3 **Contoh:**

1  $\frac{dy}{dx} = 2y$

2  $\frac{dy}{dx} = 1.8 - y$

3  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 4$

4 dan sebagainya.

- 4 Kasus pertumbuhan penduduk, gerak jatuh bebas dengan gesekan, adalah contoh-contoh sistem autonom.
- 5 PD autonom variasi medan arah HANYA pada arah sumbu tegak saja

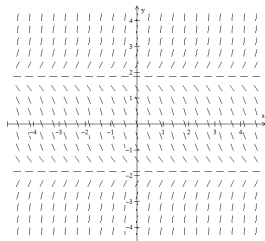
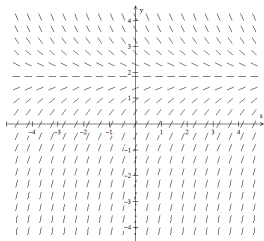
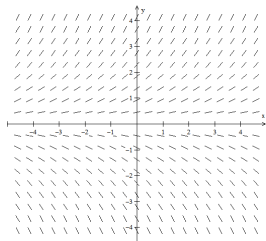
# PD orde 1 autonom

1 **Contoh:** medan arah dari PD:

2  $\frac{dy}{dx} = 2y$

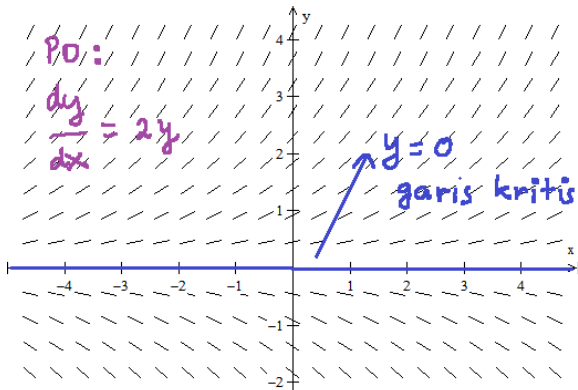
3  $\frac{dy}{dx} = 1.83 - y$

4  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1.83^2$



## Nilai kritis pada PD autonom

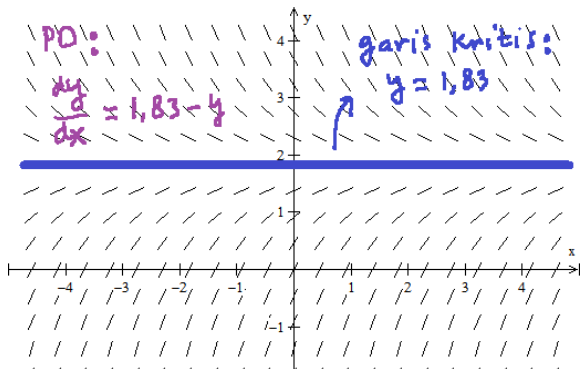
- 1 Nilai Kritis pada PD autonom adalah nilai saat  $\frac{dy}{dx} = 0$
- 2 Pada PD  $\frac{dy}{dx} = 2y$ , maka nilai kritis adalah  $\frac{dy}{dx} = 2y = 0$
- 3  $2y = 0$  memberikan hasil:  $y = 0$
- 4 Nilai kritis menunjukkan nilai saat gradien Medan Arah = 0



## Nilai kritis pada PD autonom

Contoh lainnya:

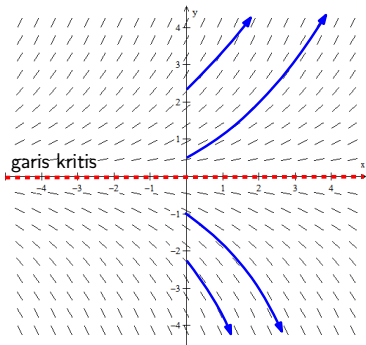
- 1 Tentukan nilai kritis pada PD autonom  $\frac{dy}{dx} = 1,83 - y$ .
- 2 Jawab:  $\frac{dy}{dx} = 1,83 - y = 0$
- 3  $1,83 - y = 0$  memberikan hasil:  $y = 1,83$
- 4 Jadi nilai kritis adalah  $y = 1,83$



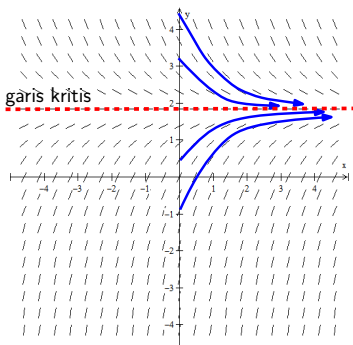
## Nilai kritis pada PD autonom

**Apa guna garis kritis?:**

- 1 Garis kritis berguna untuk menentukan trend dari suatu solusi PD jika nilai  $x$  atau sumbu datar semakin membesar.
- 2 Perhatikan trend garis kritis 2 PD sebelumnya:



$$\frac{dy}{dx} = 2y$$



$$\frac{dy}{dx} = 1,83 - y$$

## Nilai kritis pada PD autonom

- 1 Pada  $\frac{dy}{dx} = 2y$ , berapa pun nilai awal yang dipilih, jika  $x$  membesar, maka kurva semakin menjauhi garis kritis
- 2 Pada  $\frac{dy}{dx} = 1,83 - y$ , berapa pun nilai awal yang dipilih, jika  $x$  membesar, maka kurva semakin mendekati garis kritis
- 3 Garis  $y = 0$  pada PD  $\frac{dy}{dx} = 2y$  disebut garis kritis tidak stabil (karena nilai menuju  $\infty$  atau  $-\infty$ )
- 4 Garis kritis  $y = 1,83$  pada PD  $\frac{dy}{dx} = 2y$  disebut garis kritis stabil (karena nilai menuju nilai kritis tersebut).



## Nilai kritis pada PD autonom

**Plot kurva** medan arah:

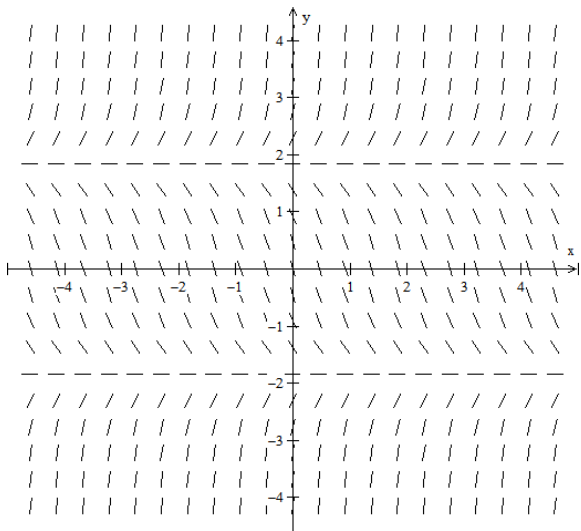
① Tentukan dua garis kritis pada PD  $\frac{dy}{dx} = y^2 - 1,83^2$

② **Jawab :**

③ .....

④ Termasuk garis kritis apakah masing-masingnya?

# Plot Medan Arah



## Phase Portrait

- 1 Dengan plot medan arah, maka mudah untuk menentukan trend kurva solusi PD, garis kritis, dan jenisnya.
- 2 Tanpa plot medan arah, maka jenis garis kritis dapat ditentukan dengan melihat trend di sekitar garis / titik kritis.
- 3 trend di sekitar titik kritis ini disebut dengan phase portrait (PP)

# Phase Portrait

## Tahapan membuat phase portrait (PP):

- 1 Tentukan titik kritis dari suatu PD Autonom:
- 2 Buat suatu sumbu tegak.
- 3 Beri tanda lingkaran kecil pada titik kritis pada sumbu tegak tersebut.
- 4 Ambil titik di bawah titik kritis (L), tentukan apakah gradien positif atau negatif di titik tersebut.
- 5 Ambil titik di atas titik kritis (U), tentukan apakah gradien positif atau negatif di titik tersebut.
- 6 dari pola tanda di L dan di U, tentukan jenis titik kritis.

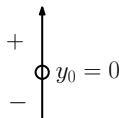
Titik L	Titik U	Kesimpulan titik kritis
-	-	Semi stabil
-	+	Tidak stabil
+	-	Stabil asyptotik
+	+	Semi stabil

# Phase Portrait

Contoh:

Gambarkan phase portrait dari PD  $\frac{dy}{dx} = 2y$

- 1 **Jawab:**
- 2 Titik kritis :  $\frac{dy}{dx} = 2y = 0$ , menghasilkan titik kritis  $y_0 = 0$
- 3 Ambil titik  $y_L$  lebih kecil dari  $y_0$ , misal  $y_L = -0,1$
- 4 Nilai gradien di titik L :  $\frac{dy}{dx} = 2(-0,1) = -0,2$  (negatif)
- 5 Ambil titik  $y_U$  lebih besar dari  $y_0$ , misal  $y_U = 0,1$
- 6 Nilai gradien di titik U :  $\frac{dy}{dx} = 2(0,1) = 0,2$  (positif)
- 7 Gambar phase portrait:



- 8 Kombinasi  $(y_L, y_U) = (-, +)$ , maka titik kritis tersebut termasuk titik kritis tidak stabil.

# Phase Portrait

Contoh:

Gambarkan phase portrait dari PD  $\frac{dy}{dx} = 2y$

- 1 **Jawab:**
- 2 Titik kritis :  $\frac{dy}{dx} = 2y = 0$ , menghasilkan titik kritis  $y_0 = 0$
- 3 Ambil titik  $y_L$  lebih kecil dari  $y_0$ , misal  $y_L = -0,1$
- 4 Nilai gradien di titik L :  $\frac{dy}{dx} = 2(-0,1) = -0,2$  (negatif)
- 5 Ambil titik  $y_U$  lebih besar dari  $y_0$ , misal  $y_U = 0,1$
- 6 Nilai gradien di titik U :  $\frac{dy}{dx} = 2(0,1) = 0,2$  (positif)
- 7 Kombinasi  $(y_L, y_U) = (-, +)$ , maka titik kritis tersebut termasuk titik kritis tidak stabil.

# Phase Portrait

## Latihan kecil 4:

Gambarkan phase portrait dari PD  $\frac{dy}{dx} = 2 - y$

**1 Jawab:**

# Phase Portrait

## Latihan kecil 5:

Gambarkan phase portrait dari PD  $\frac{dy}{dx} = 4 - y^2$

**1 Jawab:**



# Phase Portrait

## Latihan kecil 6:

Gambarkan phase portrait dari PD  $\frac{dy}{dx} = (4 - y)^2$

**1 Jawab:**

## Latihan

Soal 1 dan 2, gunakan bantuan WINPLOT.

- 1 Gambarkan medan arah dari PD:  $\frac{dy}{dx} - 2y/x = 0$ , dan gambarkan kurva solusi khusus yang memenuhi  $y(2) = 0, 5$
- 2 Variabel  $y$  menyatakan berat bayi singa laut. Laju perubahan berat badan bayi singa laut terhadap waktu ( $t$ , dalam tahun) adalah sama dengan  $0,1$  dari berat badan saat itu.
  - 1 Tentukan PD yang menyatakan pernyataan di atas.
  - 2 Tentukan titik kritis PD tersebut!
  - 3 Plot medan arahnya!
  - 4 Jika jumlah berat badan mula-mula adalah 1 kg saat  $t = 0$  (tahun), perkirakan berapa berat badan 3 tahun kemudian?
- 3 Tentukan titik kritis dan gambarkan Phase Portrait dari PD

$$\frac{dy}{dx} - 3y^2(y + 1) = 0$$

Termasuk jenis titik kritis apakah titik-titik kritis yang ada?