

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 26 : Deret dan Transformasi
Fourier (Bagian IV)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : November 2018

Tujuan Perkuliahan

- 1 Mempelajari tentang Fungsi Periodik (Bagian I)
- 2 Mempelajari Deret Fourier Fungsi Periodik (Bagian II)
- 3 Mempelajari tentang Transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya (Bagian III)
- 4 Mempelajari tentang inverse transformasi Fourier (Bagian IV)

Daftar Isi

1 Invers Transformasi Fourier

Inverse Transformasi Fourier

Transformasi Fourier (TF) mentransformasi fungsi ranah waktu $f(t)$ ke ranah frekuensi $F(i\omega)$ ¹

Invers Transformasi Fourier (Invers TF) mengembalikan $F(i\omega)$ ke $f(t)$

$$f(t) \xrightarrow{\text{Transformasi Fourier}} F(i\omega)$$

Ranah waktu

Ranah frekuensi

$$F(i\omega) \xleftarrow{\text{Invers transformasi Fourier}} f(t)$$

¹ $\omega = 2\pi f$, kecepatan sudut

Inverse Transformasi Fourier

Invers TF dapat dihitung dengan:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(iw) e^{iwt} dw$$

Meski dapat dihitung secara langsung dengan rumus di atas, menghitung invers TF lebih mudah dilakukan melalui [Tabel Transformasi](#) dan [Tabel Sifat Transformasi](#). Dua slide berikutnya menampilkan kembali kedua tabel ini.

Tabel Transformasi Fourier

Tabel Transformasi Fourier beberapa fungsi dasar:

No	Nama Fungsi	$f(t)$	$F(iw)$
1	Impulse	$\delta(t)$	1
2a	Satuan	1	$2\pi\delta(w)$
2b	Unit step	$u(t)$	$\frac{1}{iw} + \pi\delta(w)$
3	Ramp	$t u(t)$	$-\frac{1}{w^2} + \pi\delta'(w)$
4	Eksponen terpotong	$e^{at} u(t)$	$\frac{1}{iw-a}$
5a	sinus	$\sin at$	$i\pi [\delta(w+a) - \delta(w-a)]$
5b	sinus terpotong	$\sin at u(t)$	$\frac{a}{(iw)^2+a^2}$
6a	kosinus	$\cos at$	$\pi [\delta(w+a) + \delta(w-a)]$
6b	kosinus terpotong	$\cos at u(t)$	$\frac{iw}{(iw)^2+a^2}$

Tabel Sifat-sifat Transformasi Fourier

No	Nama Sifat	$f(t)$	$F(i\omega)$
1	Linier	$a f_1(t) + b f_2(t)$	$a F_1(i\omega) + b F_2(i\omega)$
2	Penskalaan waktu	$f(at)$	$\frac{1}{ a } F\left(\frac{i\omega}{a}\right)$
3	Pergeseran waktu	$f(t - t_0)$	$F(i\omega - t_0)$
4	Pergeseran frekuensi	$e^{at} f(t)$	$e^{-i\omega a} F(i\omega)$
5	Perkalian dengan t	$t f(t)$	$i \frac{d F(i\omega)}{d\omega}$
6	Turunan waktu	$\frac{df(t)}{dt}$	$(i\omega) F(i\omega)$
7	Modulasi	$f(t) \cos at$	$\frac{1}{2} [F(i(\omega + a)) + F(i(\omega - a))]$
8	Konvolusi	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(i\omega) F_2(i\omega)$

Inverse Transformasi Fourier

Fungsi $F(i\omega)$ yang diberikan harus disederhanakan sedemikian sehingga diperoleh bentuk yang ada di Tabel Transformasi dan Tabel Sifat Transformasi.

Perhatikan contoh berikut:

Contoh 1: Tentukan invers dari

$$F(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 5}$$

Jawab:

$$F(i\omega) = \frac{2}{i\omega + 5} = 2 \frac{1}{i\omega - (-5)}$$

Dengan menggunakan Tabel TF (No.4), maka diperoleh:

$$F(i\omega) = 2 \frac{1}{i\omega - (-5)} \rightarrow f(t) = 2 e^{-5t} u(t)$$

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 2: Tentukan invers dari

$$F(i\omega) = \frac{2}{(i\omega)^2 + 9}$$

Jawab: Dari Tabel TF, No.5b:

$$F(i\omega) = \frac{3}{(i\omega)^2 + 3^2} \rightarrow f(t) = \sin 3t u(t)$$

Oleh karena itu,

$$F(i\omega) = \frac{2}{(i\omega)^2 + 9} = \frac{2 \times 3 \times \frac{1}{3}}{(i\omega)^2 + 9} = \frac{2}{3} \frac{3}{(i\omega)^2 + 3^2} \rightarrow f(t) = \frac{2}{3} \sin 3t u(t)$$

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 3: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{i2w}{(iw)^2 + 10}$$

Jawab: Bentuk $F(iw)$ adalah sesuai dengan Tabel TF No. 6b (bentuk kosinus). Diketahui:

$$F(iw) = \frac{iw}{(iw)^2 + 10} = \frac{iw}{(iw)^2 + (\sqrt{10})^2} \rightarrow f(t) = \cos \sqrt{10}t u(t)$$

Sehingga

$$F(iw) = \frac{i2w}{(iw)^2 + 10} = 2 \frac{iw}{(iw)^2 + (\sqrt{10})^2} \rightarrow f(t) = 2 \cos \sqrt{10}t u(t)$$

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 4: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{i2w + 15}{(iw)^2 + 10}$$

Jawab: Bentuk $F(iw)$ disederhanakan menjadi:

$$F(iw) = \frac{i2w}{(iw)^2 + 10} + \frac{15}{(iw)^2 + 10}$$

Suku pertama memiliki invers bentuk kosinus dan suku kedua bentuk sinus. Proses invers TF dapat dilanjutkan menjadi:

.....

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 5: Tentukan invers dari $F(iw) = \frac{i2w}{(iw)^2 + 2iw + 10}$

Jawab: Bagian penyebut $F(iw)$ disederhanakan menjadi:

$$F(iw) = \frac{i2w}{(iw)^2 + 2iw + 1 + 9} = \frac{i2w}{(iw + 1)^2 + 9}$$

Oleh karena terdapat suku $(iw + 1)$ pada penyebut, suku ini juga harus dimunculkan pada pembilang tanpa mengubah persamaan.

$$\begin{aligned} F(iw) &= \frac{2iw + 2 - 2}{(iw + 1)^2 + 9} = \frac{2(iw + 1) - 2}{(iw + 1)^2 + 3^2} \\ &= 2 \frac{(iw + 1)}{(iw + 1)^2 + 3^2} - \frac{2 \frac{3}{3}}{(iw + 1)^2 + 3^2} \\ &= 2 \frac{(iw + 1)}{(iw + 1)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(iw + 1)^2 + 3^2} \end{aligned}$$

Inverse Transformasi Fourier

Lanjutan Contoh 5:

$$F(i\omega) = 2 \frac{(i\omega + 1)}{(i\omega + 1)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(i\omega + 1)^2 + 3^2}$$

Oleh karena:

$$F(i\omega) = 2 \frac{(i\omega)}{(i\omega)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(i\omega)^2 + 3^2} \rightarrow 2 \cos(3t) u(t) + \frac{2}{3} \sin(3t) u(t)$$

Maka dengan menggunakan Sifat 4, diperoleh:

$$\begin{aligned} F(i\omega) &= 2 \frac{(i\omega + 1)}{(i\omega + 1)^2 + 3^2} - \frac{2}{3} \frac{3}{(i\omega + 1)^2 + 3^2} \\ &\rightarrow 2e^{-t} \cos(3t) u(t) + \frac{2}{3} e^{-t} \sin(3t) u(t) \end{aligned}$$

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 6: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{10}{(iw)^2 + 6iw + 10}$$

Jawab:

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 7: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{10}{(iw)^2 + 6iw + 10}$$

Jawab:

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 8: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{2}{iw + 9}$$

Jawab:

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 9: Tentukan invers dari

$$F(iw) = \frac{2}{(iw + 9)(iw - 3)}$$

Jawab:

$$F(iw) = \frac{2}{(iw + 9)(iw - 3)} = \frac{A}{iw + 9} + \frac{B}{iw - 3}$$

.....

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 10: Tentukan invers dari

$$F(i\omega) = \frac{4}{(i\omega)^2 - 1}$$

Jawab:

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 11: Tentukan invers dari

$$F(i\omega) = \frac{1}{(i\omega + 2)^2}$$

Jawab: Dengan menggunakan Tabel TF, diperoleh:

$$e^{-2t} u(t) \rightarrow \frac{1}{i\omega + 2}$$

Dengan menggunakan sifat Perkalian dengan t (sifat No.5), diperoleh:

$$t e^{-2t} u(t) \rightarrow i \frac{d}{d\omega} \frac{1}{i\omega + 2} = i \cdot \frac{-i}{(i\omega + 2)^2} = \frac{1}{(i\omega + 2)^2}$$

Dengan demikian invers TF dari $F(i\omega) = \frac{1}{(i\omega + 2)^2}$ adalah $f(t) = t e^{-2t} u(t)$

Inverse Transformasi Fourier

Contoh 12: Tentukan invers dari

$$F(i\omega) = \frac{5}{(i\omega + 3)^2}$$

Jawab:

Latihan

Dengan menggunakan tabel dan sifat-sifat transformasi, tentukan Invers Transformasi Fourier dari fungsi-fungsi berikut:

$$1 \quad F(i\omega) = e^{-2i\omega}$$

$$2 \quad F(i\omega) = \delta(\omega + 10) + \delta(\omega - 10)$$

$$3 \quad F(i\omega) = 6\pi\delta(\omega) + \frac{6}{i\omega}$$

$$4 \quad F(i\omega) = \frac{6}{(i\omega)^2 + 16}$$

$$5 \quad F(i\omega) = \frac{4i\omega}{(i\omega)^2 + 16}$$

$$6 \quad F(i\omega) = \frac{2}{(i\omega)^2 - 4i\omega + 13}$$

$$7 \quad F(i\omega) = \frac{2}{(i\omega)^2 - 4i\omega + 13}$$

$$8 \quad F(i\omega) = \frac{12}{(i\omega) + 5}$$

$$9 \quad F(i\omega) = \frac{8}{(i\omega)^2 - 25}$$

$$10 \quad F(i\omega) = \frac{-3}{(i\omega + 5)^2}$$