Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 24 : Deret dan Transformasi Fourier (Bagian III)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : November 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

1. Mempelajari tentang Fungsi Periodik (Bagian I)
2. Mempelajari Deret Fourier Fungsi Periodik (Bagian II)
3. Mempelajari tentang Transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya (Bagian III)
4. Transformasi Fourier mempelajari tentang inverse transformasi Fourier (Bagian IV)

Daftar Isi

Fungsi-fungsi dasar

Transformasi Fourier adalah salah satu transformasi terpenting pada teknik Telekomunikasi.

1. Transformasi Fourier memindahkan fungsi atau sinyal pada ranah waktu ke ranah frekuensi
2. Hasil transformasi pada ranah frekuensi dapat dikembalikan ke ranah waktu dengan invers Transformasi Fourier
3. Hasil transformasi pada ranah frekuensi menyatakan gambaran komponen frekuensi (rendah, sedang, dan tinggi) dari fungsi ranah waktu.
4. Transformasi Fourier dipakai pada kuliah-kuliah lanjut seperti Pengolahan Sinyal, Sistem Komunikasi, dan sebagainya.
5. Sebelum Transformasi Fourier dipelajari, perlu direview beberapa fungsi dasar.

Fungsi dasar

Beberapa fungsi dasar:

No	Nama Fungsi	Notasi
1	Fungsi Impulse (Delta Dirac)	$f(t) = \delta(t)$
2	Fungsi unit step	$f(t) = u(t)$
3	Fungsi ramp	$f(t) = t$
4	Fungsi eksponen	$f(t) = e^{at}$
5	Fungsi sinus	$f(t) = \sin\ at$
6	Fungsi kosinus	$f(t) = \cos\ at$

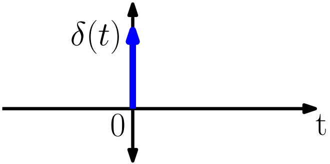
Fungsi Dasar

1). Fungsi Impulse (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Didefinisikan sebagai:

$$f(t) = \delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{untuk } t \neq 0 \\ \infty & \text{untuk } t = 0 \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1 \end{cases}$$

Gambar :



Fungsi Dasar

1). Fungsi Impulse (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Secara konsep dapat dipahami bahwa:

1. Fungsi $\delta(t)$ adalah fungsi impulse yang terjadi pada $t = 0$
2. Tingginya sangat tinggi (secara teori ∞)
3. Luasnya 1 satuan.

Dengan demikian, dapat digeneralisasi bahwa fungsi:

$$f(t) = 2\delta(t)$$

adalah

1. sinyal impulse yang terjadi pada t=0
2. tingginya $2\infty = \infty$
3. luasnya 2 satuan.

Fungsi Dasar

1). Fungsi Impulse (Delta Dirac): $f(t) = \delta(t)$

Secara konsep dapat dipahami bahwa:

1. Fungsi $\delta(t)$ adalah fungsi impulse yang terjadi pada $t = 0$
2. Tingginya sangat tinggi (secara teori ∞)
3. Luasnya 1 satuan.

Dengan demikian, dapat digeneralisasi bahwa fungsi:

$$f(t) = 2\delta(t)$$

adalah

1. sinyal impulse yang terjadi pada t=0
2. tingginya $2\infty = \infty$
3. luasnya 2 satuan.

Fungsi dasar

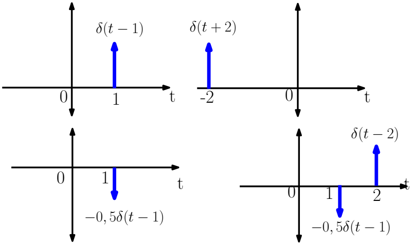
Bentuk impulse yang lebih umum dinyatakan dengan:

$$f(t) = k\delta(t - t_0)$$

$k\delta(t - t_0)$ menyatakan:

1. Sinyal impulse yang terjadi di $t = t_0$
2. Tingginya $k\infty$
3. Luasnya : k satuan

Beberapa contoh:

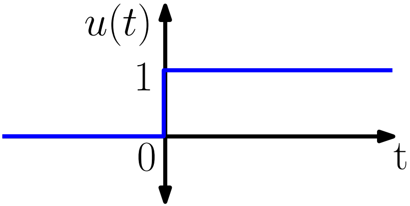


Fungsi dasar

2). Fungsi unit step $f(t) = u(t)$

Fungsi unit step didefinisikan sebagai:

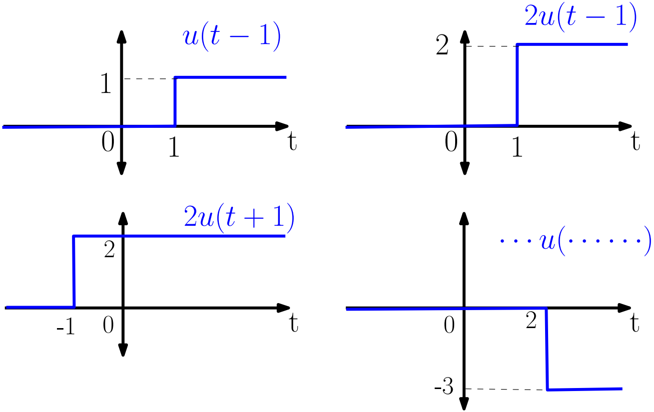
$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{untuk} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{untuk} \quad t < 0 \end{cases}$$



Fungsi dasar

2). Fungsi unit step

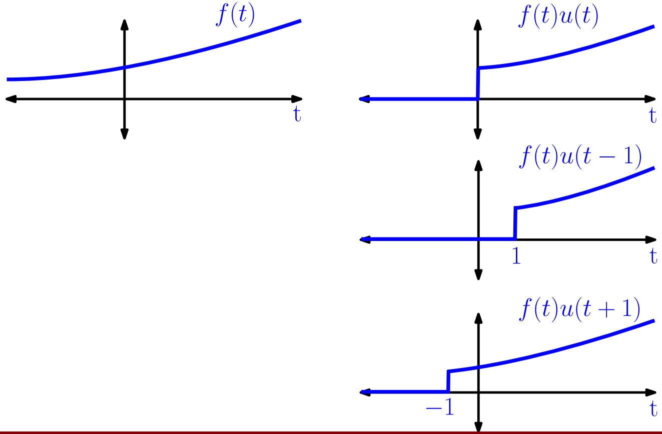
Beberapa ilustrasi:



Fungsi dasar

2). Fungsi unit step

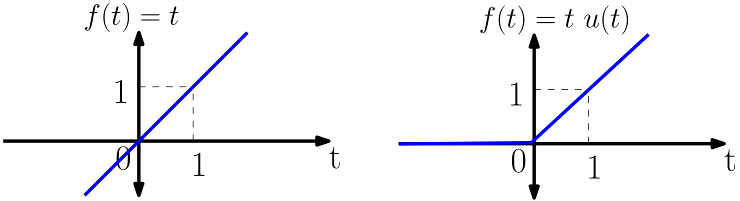
Fungsi unit step sering digunakan untuk menyatakan kapan suatu sinyal 'switched on'. (Disebut juga fungsi terpotong)



Fungsi dasar

3). Fungsi ramp

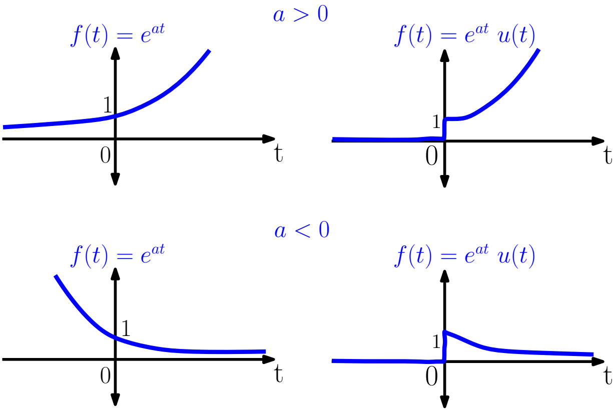
Fungsi Ramp: $f(t) = t\ u(t)$ adalah fungsi terpotong dari $f(t) = t$



Fungsi dasar

4). Fungsi eksponen

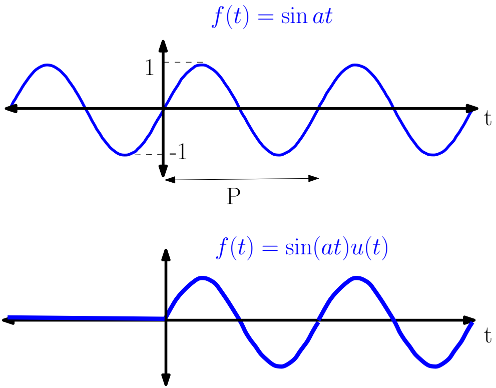
$f(t) = e^{at}$ dan bentuk terpotongnya: $f(t) = e^{at}\ u(t)$



Fungsi dasar

5). Fungsi Sinus dan bentuk terpotongnya

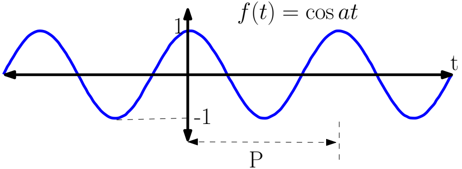
$f(t) = \sin(at)$ dan $f(t) = \sin(at)u(t)$

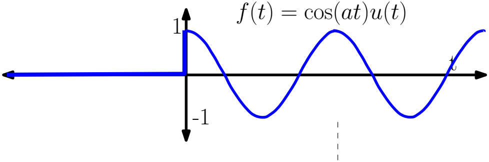


Fungsi dasar

6). Fungsi Kosinus dan bentuk terpotongnya

$f(t) = \cos(at)$ dan $f(t) = \cos(at)u(t)$





Transformasi Fourier

Transformasi Fourier dari fungsi $f(t)$ dinotasikan sebagai $F(iw)$ dengan: [1]

$$F(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \cdot e^{-iwt} dt$$

Dengan diagram panah:

$$f(t) \xrightarrow{\text{Transformasi Fourier}} F(iw)$$

Ranah waktu

Ranah frekuensi

Transformasi Fourier mentransformasikan fungsi pada ranah waktu (t) ke ranah frekuensi w. ($i = \sqrt{-1}$)

[1] Notasi lain dari transformasi Fourier adalah $F(is)$, $F(i\Omega)$, F(w) dan sebagainya.

Transformasi Fourier

Contoh 1: Tentukan transformasi Fourier dari $f(t) = \delta(t)$

Jawab:

$F(iw) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{iwt} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot e^{iw0} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) \cdot 1 dt = 1$

Jadi : $f(t) = \delta(t) \rightarrow F(iw) = 1$

Fungsi dasar yang lain dapat dihitung transformasinya dan hasil-hasilnya ditabelkan seperti slide selanjutnya.

Transformasi Fourier

Tabel Transformasi Fourier beberapa fungsi dasar:

No	Nama Fungsi	$f(t)$	$F(iw)$
1	Impulse	$\delta(t)$	1
2a	Satuan	1	$2\pi\delta(w)$
2b	Unit step	$u(t)$	$\frac{1}{iw} + \pi\delta(iw)$
3	Ramp	$t\ u(t)$	$-\frac{1}{w^2} + \pi\delta'(w)$
4	Eksponen terpotong	$e^{at}\ u(t)$	$\frac{1}{iw-a}$
5a	sinus	$\sin\ at$	$i\pi\left[\delta(w+a) - \delta(w-a)\right]$
5b	sinus terpotong	$\sin\ at\ u(t)$	$\frac{a}{(iw)^2+a^2}$
6a	kosinus	$\cos\ at$	$\pi\left[\delta(w+a) + \delta(w-a)\right]$
6b	kosinus terpotong	$\cos\ at\ u(t)$	$\frac{iw}{(iw)^2+a^2}$

Transformasi Fourier

Contoh 1: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \sin\ \pi t$$

adalah

$$F(iw) = i\pi\left[\delta(w-\pi) - \delta(w+\pi)\right]$$

(Tabel, No 5a)

Contoh 2: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{-4t}u(t)$$

adalah

$$F(iw) = \frac{1}{iw-(-4)} = \frac{1}{iw+4}$$

(Tabel, No 4)

Transformasi Fourier

Contoh 3: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \sin\ 20\pi t\ u(t)$$

adalah

$$F(iw) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Contoh 4: Transformasi Fourier dari

$$f(t) = \cos\ 20\pi t\ u(t)$$

adalah

$$F(iw) = \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Sifat-sifat Transformasi Fourier

Diketahui : $f_1(t) \to F_1(iw)$ dan $f_2(t) \to F_2(iw)$, maka berlaku

No	Nama Sifat	$f(t)$	$F(iw)$
1	Linier	$a\,f_1(t) + b\,f_2(t)$	$a\,F_1(w) + b\,F_2(w)$
2	Penskalaan waktu	$f(at)$	$\frac{1}{\lvert a\rvert} F(\frac{iw}{a})$
3	Pergeseran waktu	$f(t - t_0)$	$F(w - t_0)$
4	Pergeseran frekuensi	$e^{at} f(t)$	$F(iw - a)$
5	Perkalian dengan t	$t\,f(t)$	$i\frac{d\,F(iw)}{dw}$
6	Turunan waktu	$\frac{df(t)}{dt}$	$(iw)\,F(iw)$
7	Modulasi	$f(t)\cos at$	$\frac{1}{2}\,[F(iw + a) + F(iw - a)]$
8	Konvolusi[2]	$f_1(t) * f_2(t)$	$F_1(iw)\,F_2(iw)$

[2]Topik konvolusi akan dibahas tersendiri pada MK Pengolahan Sinyal

Transformasi Fourier

Contoh 5: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{2t} \sin\ \pi t\ u(t)$$

Jawab: Diketahui:

$$\sin \pi t\, u(t) \to \frac{\pi}{(iw)^2 + \pi^2}$$

Dengan menggunakan Sifat 4 diperoleh:

$$e^{2t} \sin \pi t\, u(t) \to \frac{\pi}{(iw - 2)^2 + \pi^2}$$

Transformasi Fourier

Contoh 6: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = e^{2t} \cos\ \pi t\ u(t)$$

Jawab: Diketahui:

$$\cos \pi t\, u(t) \to \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dengan menggunakan Sifat 4 diperoleh:

$$e^{2t} \cos \pi t\, u(t) \to \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Transformasi Fourier

Contoh 7: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = t\, e^{2t}\, u(t)$$

Jawab:

Diketahui:

$$e^{2t}\, u(t) \rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dengan menggunakan Sifat . . . . . . diperoleh:

$$t\, e^{2t}\, u(t) \rightarrow \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Transformasi Fourier

Contoh 8: Tentukan transformasi Fourier dari

$$f(t) = t \sin 5t\, u(t)$$

Jawab:

Diketahui:

$$\sin 5t\, u(t) \to \cdots\cdots\cdots\cdots$$

Dengan menggunakan Sifat . . . . . . diperoleh:

$$t \sin 5t\, u(t) \to \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Latihan

Dengan menggunakan tabel dan sifat-sifat transformasi, tentukan Transformasi Fourier dari fungsi-fungsi berikut:

1. $f(t) = u(t-2)$
2. $f(t) = u(t) - u(t-2)$
3. $f(t) = (1+t)u(t)$
4. $f(t) = 5\sin 2t\, u(t)$
5. $f(t) = 5\cos \sqrt{2}t\, u(t)$
6. $f(t) = 3\sin \sqrt{2}t\, u(t) + 4\cos \sqrt{2}t\, u(t)$
7. $f(t) = e^{-t}\cos 2t\, u(t)$
8. $f(t) = e^{-t}\sin 2t\, u(t)$
9. $f(t) = t\, e^{-t}\sin 2t\, u(t)$
10. $f(t) = t\, e^{-t}\cos 2t\, u(t)$