Telkom University

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 24 : Deret dan Transformasi Fourier (Bagian II)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : November 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

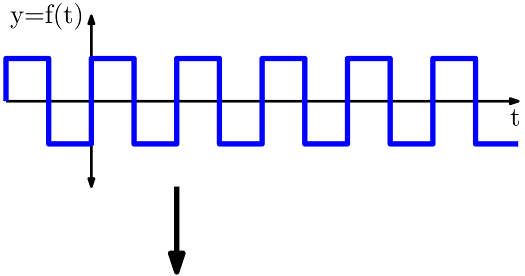
Tujuan Perkuliahan

1. Mempelajari tentang Fungsi Periodik (Bagian I)
2. Mempelajari Deret Fourier Fungsi Periodik (Bagian II)
3. Mempelajari tentang Transformasi Fourier beserta sifat-sifatnya (Bagian III)
4. Transformasi Fourier mempelajari tentang inverse transformasi Fourier (Bagian IV)

Daftar Isi

Deret Fourier fungsi periodik

Jean Joseph Fourier menyatakan bahwa, setiap fungsi periodik dapat dinyatakan sebagai penjumlahan suatu konstanta beserta suku-suku sinus dan suku-suku kosinus.



$$f(t) = a_0 + (a_1 \cos \omega t + a_2 \cos 2\omega t + \cdots + a_N \cos N\omega t) +$$
$$(b_1 \sin \omega t + b_2 \sin 2\omega t + \cdots + b_N \sin N\omega t)$$

Deret Fourier fungsi periodik

1. Konstanta a_0 dihitung dengan

$$a_o = \frac{1}{P}\int_P f(t)dt$$

2. Konstanta a_n ($n = 1, 2, ...$) dihitung dengan

$$a_n = \frac{2}{P}\int_P f(t)\cdot\cos\frac{2\pi nt}{P}dt$$

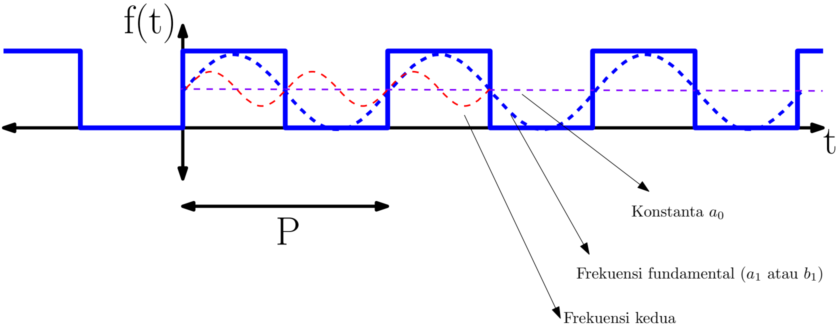
3. Konstanta b_n ($n = 1, 2, ...$) dihitung dengan

$$b_n = \frac{2}{P}\int_P f(t)\cdot\sin\frac{2\pi nt}{P}dt$$

4. dengan P adalah perioda sinyal
5. $\int_P$ menyatakan integral yang dihitung sepanjang P.

Deret Fourier fungsi periodik

Interpretasi fisis:



Pada bidang teknik elektro:

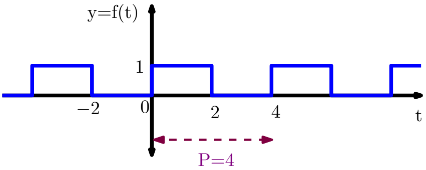
- a_o disebut komponen DC = nilai rata-rata satu periode
- a_1 dan b_1 disebut komponen fundamental
- a_2, b_2, a_3, b_3 dan seterusnya disebut harmonisa

Contoh 1: Tentukan deret Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 1 \text{ untuk } 0 \leq t \leq 2 \\ 0 \text{ untuk } 2 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad P = 4.$$

Jawab:

1. Sketsa sinyal:



2. Konstanta a_0: $a_0 = \frac{1}{P}\int_P f(t)dt = \frac{1}{4}\int_0^4 f(t)dt \rightarrow$

$$a_0 = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 f(t)dt + \int_2^4 f(t)dt\right) = \frac{1}{4}\left(\int_0^2 1dt + \int_2^4 0dt\right) = \frac{1}{2}$$

3. Koefisien Kosinus a_n (n=1,2,...):

$$a_n = \frac{2}{P}\int_P f(t)\cos\frac{2\pi nt}{P}dt = \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\cos\frac{2\pi nt}{4}dt \rightarrow$$

$$a_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 \cos\frac{2\pi nt}{4}dt + \int_2^4 0\cos\frac{2\pi nt}{4}dt\right) =$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{-4}{2\pi n}\sin\frac{2\pi nt}{4}\bigg|_{t=0}^{2}\right) = \frac{1}{2}(\sin\pi n - \sin 0) = -\frac{1}{\pi n}\sin\pi n = 0$$

Lanjutan Jawaban:

3. Koefisien sinus b_n:

$$b_n = \frac{2}{P}\int_P f(t)\sin\frac{2\pi nt}{P}dt = \frac{2}{4}\int_0^4 f(t)\sin\frac{2\pi nt}{4}dt \rightarrow$$
$$b_n = \frac{1}{2}\left(\int_0^2 1\cdot\sin\frac{\pi nt}{2}dt + \int_2^4 0\cdot\sin\frac{\pi nt}{2}dt\right) =$$
$$\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{\pi n}\cos\frac{\pi nt}{2}\bigg|_{t=0}^{2}\right) = -\frac{1}{\pi n}(\cos\pi n - \cos 0) =$$
$$\frac{1}{\pi n}(1-\cos\pi n) \quad \text{(dengan n=1,2,...)}$$

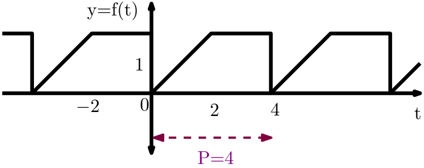
4. $b_1 = \frac{2}{\pi}$; $b_2 = 0$; $b_3 = \frac{2}{3\pi}$; $b_4 = 0$; $b_5 = \frac{2}{5\pi}$; ...
5. Dengan demikian:

$$f(t) = a_0 + a_1\cos\frac{2\pi t}{P} + a_2\cos\frac{2\pi t}{P} + \cdots +$$
$$b_1\sin\frac{2\pi\ t}{P} + b_2\sin\frac{2\pi\ t}{P} + \cdots$$
$$= 1 + \frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi t}{2} + \frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi t}{2} + \cdots$$

Contoh 2: Tentukan deret Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} t \text{ untuk } 0 \leq t \leq 2 \\ 2 \text{ untuk } 2 \leq t \leq 4 \end{cases} \qquad \text{P} = 4.$$

Jawab:



1. Sketsa sinyal:
2. Konstanta a_0:. . . . .
3. Koefisien Kosinus a_n: . . . .

Lanjutan Jawaban Contoh 2:

3. Koefisien sinus b_n:

4. Dengan demikian $f(t) =$

Contoh 3: Tentukan deret Fourier dari
$f(t) = \begin{cases} t & \text{untuk } -5 \le t \le 5 \end{cases}$ P = 10.

Jawab:

1. Sketsa sinyal:

2. Konstanta a_0:. . . . .

3. Koefisien Kosinus a_n: . . . .

Lanjutan Jawaban Contoh 3:

3. Koefisien sinus b_n:

4. Dengan demikian $f(t) =$

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Fungsi Ganjil dan fungsi Genap telah dijelaskan pada Bagian I.

1. Jika $f(t)$ fungsi ganjil, maka:
   - $a_0 = 0$ karena nilai rata-rata pada satu periode adalah 0
   - a_n = 0, (koefisien kosinus = 0) karena $\int_P f(t)\cos\frac{2\pi nt}{P}dt = 0$
   - b_n tidak nol, dan dihitung secara biasa
2. Jika $f(t)$ fungsi genap, maka:
   - a_0 ada, dihitung secara biasa
   - koefisien kosinus a_n ada, dihitung secara biasa
   - koefisien sinus $b_n = 0$, karena $\int_P f(t)\cos\frac{2\pi nt}{P}dt = 0$

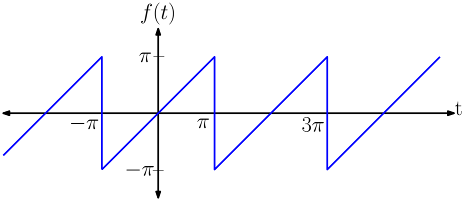
Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Contoh 4: Tentukan deret Fourier dari

$f(t) = \begin{cases} t & \text{untuk } -\pi \leq t \leq \pi \end{cases}$ P = 2π.

Jawab:

1. Sketsa sinyal:



2. Ini adalah fungsi ganjil, karena itu $a_0 = 0$:
3. Karena fungsi ganjil, maka koefisien kosinus $a_n = 0$, (n=1,2,...):

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Lanjutan Contoh 4: **Lanjutan Jawaban**:

3. Koefisien sinus b_n ada dan dihitung secara biasa:

$$b_n = \frac{2}{P}\int_P f(t)\sin\frac{2\pi nt}{P}dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin\frac{2\pi nt}{2\pi}dt \rightarrow$$
$$b_n = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} t\cdot\sin nt\ dt\right) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-pi}^{\pi} t\frac{-1}{n}d(\cos nt)\right) =$$
$$\frac{-1}{\pi n}\left(t\cos nt - \int_{-\pi}^{\pi}\cos ntdt\right) = \frac{-1}{\pi n}\left(t\cos nt - \frac{1}{n}\sin nt\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$
$$-\frac{1}{n\pi}\left(\left[\pi\cos n\pi - \frac{1}{n}\sin n\pi\right] - \left[-\pi\cos(-n\pi) - \frac{1}{n}\sin(-n\pi)\right]\right) =$$
$$-\frac{2}{n}\cos\ n\pi \text{ (dengan n=1,2,...)}$$

4. $b_1 = 2$; $b_2 = -1$; $b_3 = \frac{2}{3}$; $b_4 = -\frac{2}{4}$; $b_5 = \frac{2}{5}$; ...
5. Dengan demikian:

$$f(t) = 2\sin t - \sin 2t + \frac{2}{3}\sin 3t - \frac{2}{4}\sin 4t + \cdots$$

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Contoh 5: Tentukan deret Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} -t & \text{untuk } -1 \leq t \leq 0 \\ t & \text{untuk } 0 \leq t \leq 1 \end{cases} \qquad \text{P = 2.}$$

Jawab:

1. Sketsa sinyal:

2. Ini adalah fungsi genap, karena itu a_0 ada, yaitu:

3. Karena fungsi genap, maka koefisien sinus $b_n = 0$, (n=1,2,...):

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Lanjutan Contoh 5:

3. Koefisien kosinus a_n ada dan dihitung secara biasa:

   $a_n =$

4. Dengan demikian $f(t) =$

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Contoh 6: Tentukan deret Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} -2 & \text{untuk } -4 \leq t \leq 0 \\ 2 & \text{untuk } 0 \leq t \leq 4 \end{cases} \qquad \text{P = 2.}$$

Jawab:

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Lanjutan Contoh 6:

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Contoh 7: Tentukan deret Fourier dari

$$f(t) = \begin{cases} 2 & \text{untuk } 0 \le t \le \pi/3 \\ 0 & \text{untuk } \pi/3 \le t \le 2\pi/3 \\ 2 & \text{untuk } 2\pi/3 \le t \le \pi \end{cases} \qquad P = \pi.$$

Jawab:

Transformasi Fourier Fungsi Ganjil dan Genap

Lanjutan Contoh 7:

Latihan

Sketsa dan tentukan deret Fourier dari fungsi-fungsi berikut (Gunakan sifat fungsi Ganjil atau fungsi Genap jika mungkin):

1. $f(t) = \begin{cases} -3 & \text{untuk } -2 \leq t \leq 0 \\ 3 & \text{untuk } 0 \leq t \leq 2 \end{cases}$ P = 4.
2. $f(t) = \begin{cases} 4 & \text{untuk } 0 \leq t \leq 2 \\ -4 & \text{untuk } 2 \leq t \leq 4 \end{cases}$ P = 4.
3. $f(t) = \begin{cases} t+1 & \text{untuk } -1 \leq t \leq 0 \\ -t+1 & \text{untuk } 0 \leq t \leq 1 \end{cases}$ P = 2.
4. $f(t) = \begin{cases} t^2 & \text{untuk } 0 \leq t \leq 2\pi \end{cases}$ P = 2π.