Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 16 : Deret MacLaurin, Deret Taylor, dan Deret Laurent (Bagian I)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Oktober 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Catatan awal

1. Materi setelah UTS terkait tiga materi terpisah yang mengeksploitasi bilangan, variabel kompleks dan fungsi kompleks
2. Tiga materi ini adalah : **Deret kompleks**, **Residu**, dan **Deret dan Transformasi Fourier**
3. Tiga deret kompleks yang akan dibahas: Deret MacLaurin, Deret Taylor, dan Deret Laurent

Tujuan Perkuliahan

Kuliah ini membahas bagaimana mengekspansi suatu fungsi menjadi deret MacLaurin

Daftar Isi

Barisan dan Deret

Barisan menyatakan susunan bilangan dengan suatu pola.

1. Barisan pada bilangan riil misalnya:

   $1, 1, 1, 1, \cdots$

   $1, 2, 3, 4, \cdots, 30$

   $3, 5, 7, \cdots, 101$

   $2, 4, 8, \cdots$

2. Elemen pertama disebut sebagai suku awal, dan elemen terakhir disebut sebagai suku terakhir.
3. Barisan dengan jumlah suku berhingga disebut barisan berhingga
4. Barisan dengan jumlah suku tak berhingga disebut barisan tak berhingga.

Barisan dan Deret

Di samping **barisan bilangan** ada juga **barisan** dengan element variabel

1. Pada variabel riil misalnya:

   $x, 2x, 3x, 4x, \cdots$

   $2, 3x, 4x^2, 5x^3, \cdots$

   $3, 2x^2, 5x^4, \cdots$

   $1, 2x^{-1}, 3x^{-2}, \cdots$

   $\vdots$

   dan sebagainya

Barisan dan Deret

Penjumlahan **semua suku** pada **barisan** disebut dengan **deret**.

1. Contoh deret:

   $x + 2x + 3x + 4x + \cdots$

   $2 + 3x + 4x^2 + 5x^3, \cdots$

   $3 + 2x^2 + 5x^4 + \cdots$

   $1 + 2x^{-1} + 3x^{-2} + \cdots$

   $\vdots$

   dan sebagainya

Deret

Suatu deret disebut **deret tak-hingga** jika jumlah suku yang dijumlahkan ada **tak hingga banyak**.

Contoh:

1. $x + x^2 + x^3 + x^4$ adalah deret berhingga dengan jumlah suku 4
2. $x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5$ adalah deret berhingga dengan jumlah suku 5
3. $x + 2x + 3x + 4x + \cdots$ adalah deret tak-hingga karena jumlah suku tak hingga.
4. $x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \cdots$ adalah ...
5. $1 + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4$ adalah ...

Deret

Deret polinomial.
Deret polinomial adalah salah satu deret yang paling penting pada analisis fungsi.

Deret polinomial dengan pangkat naik ditulis sebagai:

$$a_0 + a_1 x^1 + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

$a_0, a_1, \cdots, a_n$ disebut sebagai koefisien deret.

Deret polinomial dengan pangkat turun dapat ditulis sebagai:

$$a_0 + a_{-1} x^1 + a_{-2} x^2 + \cdots + a_{-n} x^n + \cdots$$

dengan koefisien $a_0, a_{-1}, \cdots, a_{-n}$.

Deret

Contoh: Diberikan deret berikut

$1 + 2x^1 + 4x^2 + 8x^3 + \cdots$

$a_0 = 1$

$a_1 = \cdots$

$a_2 = \cdots$

$a_4 = \cdots$

$a_{10} = \cdots$

Deret

Contoh lain: Diberikan deret berikut

$1 + 3x^2 + 5x^3 + \cdots$

$a_0 = 1$

$a_1 = \cdots$

$a_2 = \cdots$

$a_4 = \cdots$

$a_{10} = \cdots$

Deret MacLaurin

MacLaurin menyatakan bahwa setiap fungsi riil f(x) yang differentiable $x = 0$ dapat diuraikan menjadi deret polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

Dengan $f^n(x)$ menyatakan turunan ke-n dari $f(x)$. Notasi lain : f'(x) menyatakan turunan pertama, turunan f''(x) menyatakan turunan kedua, f'''(x) menyatakan turunan ketiga, dst.

Deret MacLaurin

Contoh:

Uraikan $f(x) = e^x$ dalam deret MacLaurin.
Jawab:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

a_0, a_1, a_2, dst akan dicari satu per satu:

fungsi	ekspresi	nilai di 0
$f(x)$	e^x	$f(0) = 1$
$f'(x)$	e^x	$f'(0) = 1$
$f''(x)$	e^x	$f''(0) = 1$
$f'''(x)$	e^x	$f'''(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

koefisien	ekspresi	nilai
a_0	$= \frac{1}{0!} f(0)$	1
a_1	$= \frac{1}{1!} f'(0)$	1
a_2	$= \frac{1}{2!} f''(0)$	$\frac{1}{2!}$
a_3	$= \frac{1}{3!} f'''(0)$	$\frac{1}{3!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dengan demikian : $f(x) = e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots$

Deret MacLaurin

Contoh lain:

Uraikan $f(x) = \sin\ x$ dalam deret MacLaurin.
Jawab:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

a_0, a_1, a_2, dst akan dicari satu per satu:

fungsi	ekspresi	nilai di 0
$f(x)$	$\sin\ x$	$f(0) = 0$
$f'(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$f''(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$f'''(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$

koefisien	ekspresi	nilai
a_0	$= \frac{1}{0!} f(0)$	0
a_1	$= \cdots$	$\cdots$
a_2	$= \frac{1}{2!} \cdots$	$\cdots$
a_3	$= \frac{1}{3!} \cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dengan demikian : $f(x) = \sin\ x = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$

Deret MacLaurin

Contoh lain lagi:

Uraikan $f(x) = \cos\ x$ dalam deret MacLaurin.
Jawab:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \cdots$$

a_0, a_1, a_2, dst akan dicari satu per satu:

fungsi	ekspresi	nilai di 0
$f(x)$	$\cos\ x$	$f(0) = 1$
$f'(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$f''(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$f'''(x)$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots = \cdots$

koefisien	ekspresi	nilai
a_0	$= \frac{1}{0!} f(0)$	0
a_1	$= \frac{1}{1!} \cdots$	$\cdots$
a_2	$= \frac{1}{2!} \cdots$	$\cdots$
a_3	$= \frac{1}{3!} \cdots$	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dengan demikian : $f(x) = \cos\ x = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$

Deret Kompleks

Deret kompleks adalah perluasan dari deret riil dengan nilai setiap suku berupa bilangan kompleks atau variabel kompleks.

Contoh: Diberikan deret kompleks ($z = x + iy$):

$1 + 2iz + 4z^2 + 8iz^3 + \cdots$

$a_0 = 1$

$a_1 = \cdots$

$a_2 = \cdots$

$a_4 = \cdots$

$a_{10} = \cdots$

Deret Kompleks

Ekspansi MacLaurin dari suatu fungsi kompleks $f(z)$ berlaku sama seperti fungsi riil.

Jika f(z) differentiable $z = 0$, maka f(z) dapat diuraikan menjadi deret polinomial:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(0)$$

$f^n(z)$ menyatakan turunan ke-n dari $f(z)$.

Deret MacLaurin

Contoh:

Uraikan $f(z) = e^z$ dalam deret MacLaurin.
Jawab:

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

a_0, a_1, a_2, dst akan dicari satu per satu:

fungsi	ekspresi	nilai di 0
$f(z)$	e^z	$f(0) = 1$
$f'(z)$	e^z	$f'(0) = 1$
$f''(z)$	e^z	$f''(0) = 1$
$f'''(z)$	e^z	$f'''(0) = 1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

koefisien	ekspresi	nilai
a_0	$= \frac{1}{0!} f(0)$	1
a_1	$= \frac{1}{1!} f'(0)$	1
a_2	$= \frac{1}{2!} f''(0)$	$\frac{1}{2!}$
a_3	$= \frac{1}{3!} f'''(0)$	$\frac{1}{3!}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dengan demikian : $f(x) = e^z = 1 + z + \frac{1}{2!} z^2 + \frac{1}{3!} z^3 + \cdots$

Deret MacLaurin

Contoh lain lagi:

Uraikan $f(z) = \sin\ z$ dalam deret MacLaurin.
Jawab: ....

Uraikan $f(z) = \cos\ z$ dalam deret MacLaurin.
Jawab: ....

Fungsi rasional

Fungsi rasional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ memiliki titik singular di z_p yaitu nilai z yang menyebabkan $Q(z) = 0$.

Fungsi jenis ini paling banyak muncul di sistem kontrol dan pengolahan sinyal digital, serta bidang lain yang memerlukan fungsi transfer.

Permasalahan pada fungsi ini adalah $f(z)$ tidak analitik pada titik singular.

Deret MacLaurin

Ekspansi MacLaurin fungsi rasional

Uraikan $f(z) = \frac{1}{1-z}$ dalam deret MacLaurin.

Jawab:

fungsi	ekspresi	nilai di 0
$f(z)$	$\frac{1}{1-z}$	$f(0) = 1$
$f'(z)$	$\frac{1}{(1-z)^2}$	$f'(0) = 1$
$f''(z)$	$\frac{2}{(1-z)^3}$	$f''(0) = 2!$
$f'''(z)$	$\frac{3!}{(1-z)^4}$	$f'''(0) = 3!$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

koefisien	ekspresi	nilai
a_0	$= \frac{1}{0!} f(0)$	1
a_1	$= \frac{1}{1!} f'(0)$	1
a_2	$= \frac{1}{2!} f''(0)$	1
a_3	$= \frac{1}{3!} f'''(0)$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Dengan demikian : $f(x) = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$

Deret MacLaurin

Area kekonvergenan:

Ekspansi Maclaurin:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

hanya benar jika $|z| < 1$

Jika diambil misalnya $z = 2$, maka

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-2} = -1$$

sedangkan

$$1 + z + z^2 + z^3 + \cdots = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots = \infty$$

Dengan demikian, untuk z=2,

$$\frac{1}{1-z} \neq 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

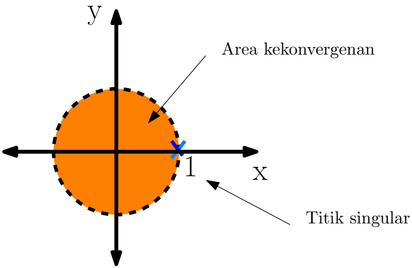
Deret MacLaurin

Dengan demikian, pengekspansian Maclaurin yang benar adalah:

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

untuk $|z| < 1$

Area $|z| < 1$ disebut area kekonvergenan ekspansi Maclaurin di atas. Gambar area kekonvergenan:



Deret MacLaurin

Secara umum,

$$\frac{1}{1-kz} = 1 + (kz) + (kz)^2 + (kz)^3 + \cdots$$

untuk

$$|kz| < 1$$

atau

$$|z| < \frac{1}{|k|}$$

Deret MacLaurin

Contoh: tentukan ekspansi Maclaurin dari $f(z) = \frac{1}{1-2z}$ beserta area kekonvergenannya.

Jawab:

$$f(z) = \frac{1}{1-2z} = 1 + 2z + (2z)^2 + (2z)^3 + \cdots$$
$$= 1 + 2z + 4z^2 + 8z^3 + \cdots$$

untuk

$$|2z| < 1$$

atau

$$|z| < \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$$

Deret MacLaurin

Contoh: tentukan ekspansi Maclaurin dari $f(z) = \frac{1}{1+2z}$ beserta area kekonvergenannya.

Jawab:

$$f(z) = \frac{1}{1-2z} = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$
$$= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

untuk

$$|\cdots| < \cdots$$

atau

$$|z| < \frac{\cdots}{|\cdots|} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

Deret MacLaurin

Contoh: tentukan ekspansi Maclaurin dari $f(z) = \frac{3}{1-5z}$ beserta area kekonvergenannya.

Jawab:

$$\begin{aligned} f(z) = \frac{3}{1-5z} &= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \\ &= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots \end{aligned}$$

untuk

$$|\cdots| < \cdots$$

atau

$$|z| < \frac{\cdots}{|\cdots|} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

Deret MacLaurin

Contoh: tentukan ekspansi Maclaurin dari $f(z) = \frac{-5}{1+11z}$ beserta area kekonvergenannya.

Jawab:

$$f(z) = \frac{-5}{1+11z} = \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$
$$= \cdots + \cdots + \cdots + \cdots + \cdots$$

untuk

$$|\cdots| < \cdots$$

atau

$$|z| < \frac{\cdots}{|\cdots|} = \frac{\cdots}{\cdots}$$

Latihan

1. Lakukan ekspansi MacLaurin dari fungsi $f(z) = \sin\ 2z$
2. Lakukan ekspansi MacLaurin dari fungsi $f(z) = \cos\ 3z\ + 6z$
3. Lakukan ekspansi MacLaurin dari fungsi $f(z) = \cosh\ 3z$
4. Lakukan ekspansi MacLaurin dari fungsi $f(z) = \frac{2}{1-4z}$ beserta daerah kekonvergenannya
5. Lakukan ekspansi MacLaurin dari fungsi $f(z) = \frac{6}{3-2z}$ beserta daerah kekonvergenannya