Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 21 : Residu (Bagian III)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Oktober 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

1. Mempelajari aplikasi residu (Bagian III)
   1. menghitung integral tak wajar dengan suku sinus dan kosinus
   2. menghitung integral tertentu dengan suku sinus dan kosinus

Daftar Isi

Menghitung integral riil dengan komponen sinus atau kosinus

Pada bagian sebelumnya telah dihitung cara menghitung integrasi tak wajar riil fungsi rasional dengan menggunakan metode residu.

Sedikit modifikasi dari fungsi rasional riil tersebut adalah integral yang mengandung sin ax atau cos ax pada bagian pembilang.

Contoh: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+1} dx$, $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 5x}{x^2+2x+2} dx$, dst.

Menghitung integral riil dengan komponen sinus atau kosinus

Integrasi riil $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos axdx$ atau $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin axdx$, dapat diselesaikan dengan metode residu dengan syarat:

1. batas integrasi dari $-\infty$ sampai ∞
2. selisih pangkat tertinggi penyebut dengan pangkat tertinggi pembilang sekurang-kurangnya adalah 1
3. fungsi f(x) tidak mengandung titik singular pada sumbu riil.

Jika salah satu dari syarat di atas tidak terpenuhi, maka metode residu tidak dapat diterapkan.

Menghitung integral riil dengan komponen sinus atau kosinus

Jika syarat-syarat terpenuhi, maka menghitung $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos axdx$ atau $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin axdx$, dilakukan secara tidak langsung dengan menghitung:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$$

Bentuk terakhir ini diselesaikan dengan integral kompleks:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx &= \oint_C e^{iaz} f(z) dz \\ &= 2\pi i [Res_{z=z_1} e^{iaz} f(z) + \ Res_{z=z_2} e^{iaz} f(z) + \\ &\cdots + Res_{z=z_k} e^{iaz} f(z)]\end{aligned}$$

Dengan $z_1, z_2, \cdots, z_k$ adalah titik-titik singular pada bagian atas bidang kompleks.

Menghitung integral riil dengan komponen sinus atau kosinus

Setelah $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$ dihitung, maka

1. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos ax \; dx$ adalah bagian riil dari $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$,
2. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin ax \; dx$ adalah bagian imaginer dari $\int_{-\infty}^{\infty} e^{iax} f(x) dx$.

Perhatikan contoh berikut.

Menghitung integral riil dengan komponen sinus atau kosinus

Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx$

Jawab:

1. Di sini: $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$
2. akan dihitung dulu $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{ix}\ dx$
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} e^{ix}\ dx = \oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} = \oint_C \frac{e^{iaz}}{(z-i)(z+i)} dz$
4. Terdapat dua pole yaitu: $z = i$ dan $z = -i$, pole yang terletak di separoh atas bidang kompleks adalah $z = i$
5. Fungsi sisa di $z = i$ adalah $q(z) = \frac{e^{iz}}{z+i}$
6. Residu di $z = i$ adalah $q(i) = \frac{e^{i \cdot i}}{i+i} = \frac{e^{-1}}{2i}$
7. $\oint_C \frac{e^{iz}}{z^2+1} = 2\pi i(Resz = ie^{iz} f(z)) = 2\pi i \left(\frac{e^{-1}}{2i}\right) = \frac{\pi}{e}$
8. Dengan demikian: $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x^2+1} dx = Re(\frac{\pi}{e}) = \frac{\pi}{e}$

Contoh lain: Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 2x}{x^2+x+\frac{5}{2}}dx$ **Jawab:**

1. . . . .

Contoh lain: Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2+2x+2} dx$ **Jawab:**

1. . . . .

Integral tentu

Aplikasi terakhir dari metode Residu pada pembahasan ini adalah menghitung integral tentu (riil)

1. Integral tentu adalah integral dengan batas bawah dan batas atas tertentu.
2. Contoh: $\int_3^5 (2x+5)dx$, $\int_0^{10} \frac{1}{x+7} dx$, dst
3. Bentuk integral tentu yang dapat dihitung dengan metode residu adalah bentuk:

$$\int_{-\pi+k}^{\pi+k} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

dengan $f(\cos(\theta), \sin(\theta))$ analitik pada θ dari $-\pi$ sampai π

4. **Contoh:** $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2+\cos\theta} d\theta$, $\int_0^{2\pi} \frac{\sin\theta}{1+\cos^2\theta} d\theta$, dst

Integral tentu

Penyelesaian

$$\int_{-\pi+k}^{\pi+k} f(\cos(\theta), \sin(\theta)) d\theta$$

dilakukan dengan mengingat identitas: $\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$ dan $\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$

Dengan mengambil $z = e^{i\theta}$ (asumsi $|z| = 1$), maka $\cos\theta$ dan $\sin\theta$ dapat dinyatakan dalam z sebagai:

$$\cos\theta = \frac{z + \frac{1}{z}}{2}$$

dan

$$\sin\theta = \frac{z - \frac{1}{z}}{2i}$$

Dari $z = e^{i\theta}$, diperoleh: $dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta$ atau $d\theta = \frac{1}{iz}dz$

Integral tentu

Dengan substitusi :

- $\cos\theta = \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$
- $\sin\theta = \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$
- $d\theta = \frac{1}{iz}dz$

maka integral riil

$$\int_{-\pi+k}^{\pi+k} f(\cos(\theta), \sin(\theta))d\theta$$

diubah menjadi integral kompleks lintasan tertutup:

$$\oint_C f\left(\frac{z+\frac{1}{z}}{2}, \frac{z-\frac{1}{z}}{2i}\right)\frac{1}{iz}dz$$

dengan C adalah lintasan tertutup $|z| = 1$ arah berlawanan jarum jam. Integral kompleks ini diselesaikan dengan metode residu seperti biasa.

Integral tentu

Contoh: Selesaikan $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta}$ **Jawab:**

1. Substitusi $\sin\theta = \frac{e^z - e^-z}{2i}$ dan $d\theta = \frac{1}{iz}dz$, diperoleh integral tertutup kompleks:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \oint_C \frac{\frac{1}{iz}dz}{2+\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}} = \oint_C \frac{dz}{i2z+\frac{z^2-1}{2}}$$

$$= \oint_C \frac{2dz}{z^2+i4z-1} = \oint_C \frac{2dz}{(z+2i+\sqrt{3})(z+2i-\sqrt{3})}$$

2. Terdapat dua pole: $z = -2i + \sqrt{3}$ dan $z = -2i + \sqrt{3}$
3. Hanya pole di $z = -2i + \sqrt{3}$ yang berada di dalam lingkaran satuan C: $|z| = 1$. Residu dihitung di titik ini.
4. Residu di $z = -2i + \sqrt{3}$ adalah $q(-2i + \sqrt{3}) = \frac{1}{i\sqrt{3}}$
5. Sehingga $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = 2\pi i(Res_{z=-2i+\sqrt{3}} f(z)) = 2\pi i(\frac{1}{i\sqrt{3}}) = \frac{2\pi}{\sqrt{3}}$

Integral tentu

Contoh lain: Selesaikan $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$ **Jawab:**

1. . . . .

Integral tentu

Contoh lain: Selesaikan $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\frac{1}{4}\sin\theta}$ **Jawab:**

1. ....

Latihan

Dengan metode residu, hitung integral berikut:

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin 3x}{(x^2+2x+2)} dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 2x}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$
3. $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{2-\cos\theta}$
4. $\int_{0}^{2\pi} \frac{d\theta}{1+\cos^{\theta}}$