Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 20 : Residu (Bagian II)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Oktober 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

1. Mempelajari Residu (Bagian I)
2. Mempelajari aplikasi residu (Bagian II)
   1. menghitung integral tertutup kompleks
   2. menghitung integral tak wajar
3. Mempelajari aplikasi residu (Bagian III)
   1. menghitung integral tak wajar dengan suku sinus dan kosinus
   2. menghitung integral tertentu dengan suku sinus dan kosinus

Daftar Isi

1. Menghitung integral tertutup
2. Integral Tak Wajar

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Residu yang telah dipelajari pada Bagian I dapat digunakan untuk menghitung integral lintasan tertutup.

Jika fungsi rasional

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

memiliki pole di $z = z_1, z = z_2, \ldots, z = z_N$, maka integral tertutup dengan lintasan C:

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \ \left(Res_{z=z_1} f(z) + Res_{z=z_2} f(z) + \cdots + Res_{z=z_k} f(z)\right)$$

dengan $z_1, z_2, \cdots, z_k$ adalah pole-pole yang berada di dalam daerah interior lintasan C.

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Dengan kalimat yang sederhana dapat dinyatakan bahwa:

Integral tertutup pada lintasan C[1] *dari fungsi rasional f(z) adalah* $2\pi i$ *dikali jumlah semua residu* f(z) pada *pole-pole yang berada di dalam lintasan C*.

Pernyataan di atas disebut juga dengan Teorema Residu.

[1] Diasumsikan gerak lintasan berlawanan arah jarum jam

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Contoh:

1. Hitung $\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{z}{z+1}dz$ dengan lintasan C: $|z| = \frac{1}{2}$ dan lintasan C: $|z| = \frac{3}{2}$
2. **Jawab:**
3. Pole dari $f(z) = \frac{z}{z+1}$ adalah $z = -1$
4. Fungsi sisa di $z = -1$ adalah $q(z) = z$ dan pole $z = -1$ adalah orde 1. Dengan demikian $Res_{z=-1} = q(-1) = -1$.
5. Untuk lintasan $C : |z| = \frac{1}{2}$, pole $z = -1$ berada di luar lintasan. Dengan demikian: $\oint_C \frac{z}{z+1}dz = 0$
6. Untuk lintasan $C : |z| = \frac{3}{2}$, pole $z = -1$ berada di dalam lintasan. Dengan demikian: $\oint_C \frac{z}{z+1}dz = 2\pi i(Res_{z=-1} f(z)) = 2\pi i(-1) = -2\pi i$

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Contoh lain:

1. Hitung $\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{2z+1}{z(z-1)(z+2)}dz$ dengan C: $|z| = 1,2$
2. **Jawab:** Terdapat 3 pole yaitu: $z = 0$, $z = 1$, dan $z = -2$, ketiganya orde 1.
3. Hanya pole $z = 0$ dan $z = 1$ yang berada di dalam lintasan C, oleh karena itu perlu dihitung Residu pada kedua pole ini.
4. Residu di $z = 0$:
$$Res_{z=0}f(z) = q(0) = \left.\frac{2z+1}{(z-1)(z+2)}\right|_{z=0} = \frac{2\cdot 0+1}{(0-1)(0+2)} = -\frac{1}{2}$$
5. Residu di z=1:
$$Res_{z=1}f(z) = q(1) = \left.\frac{2z+1}{z(z+2)}\right|_{z=1} = \frac{2\cdot 1+1}{1(1+2)} = \frac{3}{3} = 1$$
6. $\oint_{|z|=1,2} \frac{2z+1}{z(z-1)(z+2)}dz = 2\pi i(Res_{z=0}f(z) + Res_{z=1}f(z)) = 2\pi i(-\frac{1}{2} + 1) = \pi i$

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Contoh lain:

1. Hitung $\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{10z+2}{z^2+1}dz$ dengan C: $|z| = 2$

   Jawab: ....

Menghitung integral tertutup dengan Residu

Contoh lain:

1. Hitung $\oint_C f(z)dz = \oint_C \frac{e^z}{z^2(z-1)}dz$ dengan C: $|z| = 2$

   Jawab: . . . .

Integral Tak Wajar

Residu dapat digunakan untuk menghitung integral riil, yang dalam hal ini adalah integral tak wajar.

Ada tiga tipe integral tak wajar:

1. Integral yang batas bawahnya $-\infty$ atau batas atasnya ∞.
2. Integral batas bawahnya $-\infty$ dan batas atasnya ∞.
3. Integral yang kedua batasnya berhingga, namun interval integrasinya memuat titik singular.

Integral Tak Wajar

Beberapa contoh:

1. $\int_{-\infty}^{0} \frac{x}{x^2+1} dx$ adalah integral tak wajar karena batas bawahnya $-\infty$
2. $\int_{5}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ adalah integral tak wajar karena batas atasnya ∞
3. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{x^2+1} dx$ adalah integral tak wajar karena kedua batasnya melibatkan ∞
4. $\int_{0}^{5} \frac{x}{x-1} dx$ adalah integral tak wajar karena titik singular $x = 1$ masuk dalam interval integrasi [0-5]
5. $\int_{2}^{5} \frac{x}{x-1} dx$ adalah bukan integral tak wajar karena titik singular $x = 1$ tidak masuk dalam interval integrasi [2-5].

Integral Tak Wajar

Tidak semua integral tak wajar dapat diselesaikan dengan metode Residu. Tiga syarat integral tak wajar yang dapat diselesaikan dengan metode Residu adalah :

1. Batas bawah integral $-\infty$ dan batas atasnya adalah ∞ (Syarat I)
2. fungsi integral f(x) adalah fungsi rasional dengan pangkat tertinggi penyebut sekurang-kurangnya +2 lebih banyak dibanding pangkat tertinggi pembilang (Syarat II).
3. Titik singular f(z) tidak terletak pada sumbu x (Syarat III)

Beberapa contoh:

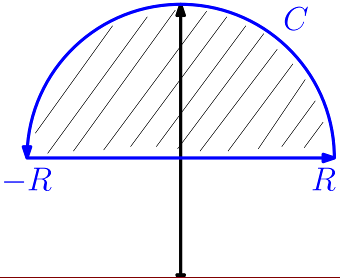
1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x+1}{(x+i)(x-i)(x+2i)(x-2i)} dx$
3. dst...

Integral Tak Wajar

Jika ketiga syarat terpenuhi, maka integral riil dapat diubah menjadi integral kompleks sebagai berikut:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = \oint_{C} f(z)dz$$

Dengan lintasan C adalah lintasan tertutup, dari -R ke R pada sumbu riil, dan dilanjutkan dengan setengah lingkaran seperti gambar.



Integral Tak Wajar

Dengan menggunakan teorema Residu, Integral

$$\oint_C f(z)dz$$

dengan lintasan C adalah sama dengan

$$2\pi i(Res_{z=z_1} f(z) + Res_{z=z_2} f(z) + \cdots + Res_{z=z_k} f(z))$$

Dengan $z_1, z_2, \cdots, z_k$ adalah pole-pole yang berada di bagian atas bidang kompleks ($Im(z) > 0$)

Integral Tak Wajar

Contoh: Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ **Jawab:**

1. Batas integrasi $-\infty$ sampai ∞ (Syarat I terpenuhi)
2. Pangkat tertinggi pembilang 0 dan pangkat tertinggi penyebut 2, dengan demikian selisih pangkat adalah 2 (Syarat II terpenuhi)
3. Pole : $x^2 + 1 = 0$ menghasilkan $z = -i$ dan $z = i$, tidak berada pada sumbu riil (Syarat III terpenuhi).
4. dengan demikian:
   $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$ dengan lintasan C adalah mengitari bagian atas bidang kompleks.
5. Pole $z = i$ berada dalam lintasan.
6. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$, Fungsi sisa di $z = i$ adalah $q(i) = \frac{1}{z+i}$
7. Residu di $z = i$ adalah $q(i) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$
8. dengan demikian : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i (\frac{1}{2i}) = \pi$

Integral Tak Wajar

Contoh: Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$ **Jawab:**

1. Batas integrasi $-\infty$ sampai ∞ (Syarat I terpenuhi)
2. Pangkat tertinggi pembilang 0 dan pangkat tertinggi penyebut 2, dengan demikian selisih pangkat adalah 2 (Syarat II terpenuhi)
3. Pole : $x^2 + 1 = 0$ menghasilkan $z = -i$ dan $z = i$, tidak berada pada sumbu riil (Syarat III terpenuhi).
4. dengan demikian:
   $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz$ dengan lintasan C adalah mengitari bagian atas bidang kompleks.
5. Pole $z = i$ berada dalam lintasan.
6. $f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$, Fungsi sisa di $z = i$ adalah $q(i) = \frac{1}{z+i}$
7. Residu di $z = i$ adalah $q(i) = \frac{1}{i+i} = \frac{1}{2i}$
8. dengan demikian : $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1} dx = \oint_C \frac{1}{z^2+1} dz = 2\pi i(\frac{1}{2i}) = \pi$

Integral Tak Wajar

Contoh: Hitung $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$ **Jawab:**

1. oleh karena $\frac{1}{x^2+1}$ adalah fungsi genap, maka $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$
2. $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} dx$ telah dihitung sebelumnya yaitu $\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \pi$
3. sehingga: $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{1}{2}\pi$

Integral Tak Wajar

Contoh: Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{5}{x^2+2x+26} dx$

Jawab:

1. . . . .

Integral Tak Wajar

Contoh: Diketahui bahwa $x^4 + 5x^2 + 4 = (x^2 + 1)(x^2 + 4)$.
Hitung $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2x^2-1}{x^4+5x^2+4} dx$

Jawab:

1. . . . .

Latihan

1. Dengan metode Residu, hitung integral kompleks berikut (untuk semua integral, lintasan C adalah $|z| = 5$ dengan arah lintasan berlawanan jarum jam):
   1. $\oint_C \frac{z^4+6}{z^2-2z} dz$
   2. $\oint_C \frac{\sin z}{z^2-4} dz$
   3. $\oint_C \frac{1}{z \sin z} dz$ (Petunjuk: perderetkan $\sin z$ dengan deret MacLaurin)
2. Dengan metode residu, hitung integral berikut:
   1. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2+4)} dx$
   2. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+2x+2)} dx$
   3. $\int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)^2} dx$