Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 19 : Residu (Bagian I)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Oktober 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

1. Mempelajari Residu (Bagian I)
2. Memperlajari aplikasi residu (Bagian II) untuk:
    1. menghitung integral tertutup kompleks
    2. menghitung integral tak wajar

Daftar Isi

Fungsi rasional

Pada fungsi rasional

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

Didefinisikan beberapa terminologi:

1. fungsi pembilang : $P(z)$
2. fungsi penyebut : $Q(z)$
3. titik singular : titik z yang menyebabkan $Q(z)$ bernilai 0.

Fungsi rasional

Fungsi penyebut $Q(z)$ dapat tersusun atas beberapa suku: sebagai contoh:

1. $Q(z) = (z - z_A)(z - z_B)$
2. $Q(z) = (z - z_A)(z - z_B)(z - z_C)$
3. $Q(z) = (z - z_A)^2(z - z_B)(z - z_C)^3$
4. $Q(z) = (z - z_A)(1 - e^z)$
5. $dst.$
6. $z_A, z_B, z_C, \ldots$ adalah suatu bilangan kompleks.

Berikut beberapa contoh dari $f(z)$:

1. $f(z) = \frac{z}{z+1}$
2. $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$
3. $f(z) = \frac{z^2+2z+3}{(z+1)^2(z+2)(z+3)}$
4. dst.

Suku penyebut

Suku penyebut menyatakan jumlah perkalian suku yang membentuk penyebut.

1. Pada fungsi $f(z) = \frac{z}{z+1}$ penyebut $Q(z) = z + 1$ terdiri dari satu suku yaitu (z+1).
2. $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ penyebut $Q(z) = z(z + 1)$ terdiri dari perkalian 2 suku z dan $(z + 1)$
3. $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ penyebut $Q(z) = z^2 + 1$ terdiri dari perkalian 2 suku $(z + i)$ dan $(z - i)$
4. $f(z) = \frac{1}{(z+1)^2(z+2)}$ penyebut $Q(z) = (z + 1)^2(z + 2)$ terdiri dari perkalian 3 suku $(z + 1)$,$(z + 1)$ dan $(z + 2)$. Oleh karena suku (z+1) ada dua, maka dapat juga disebut bahwa penyebut terdiri dari dua suku, yaitu: $(z + 1)^2$ dan $(z + 2)$.

Pole atau kutub

Nilai nol dari suku penyebut disebut sebagai sebagai titik singular. Istilah lainnya adalah pole atau kutub.

1. Pole atau kutub dari fungsi $f(z) = \frac{z}{z+1}$ adalah $z = 0$ dan $z = -1$
2. Pole dari fungsi $f(z) = \frac{e^z}{z^2+1}$ penyebut adalah $z = i$ dan $z = -i$

Pole secara harfiah berarti kutub atau dapat juga: tiang-tiang yang tinggi (tiang tinggi di pinggir jalan seperti tiang listrik dsb disebut sebagai poles). Oleh karena pole adalah harga nol suku penyebut, maka nilai f(z) sangat tinggi pada titik tersebut.

Fungsi sisa

Jika satu suku penyebut diambil dari fungsi $f(z)$, maka akan tersisa suatu fungsi sisa : $q(z)$.

Contoh

1. Jika suku penyebut (z+1) diambil dari fungsi $f(z) = \frac{z}{z+1}$ maka fungsi sisa adalah $q(z) = z$
2. Jika suku penyebut z diambil dari $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ maka fungsi sisa adalah $q(z) = \frac{e^z}{z+1}$
3. Jika suku penyebut z+1 diambil dari $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ maka fungsi sisa adalah $q(z) = \frac{e^z}{z}$
4. dst...

Fungsi sisa

Pernyataan lain untuk menyatakan fungsi sisa adalah sebagai berikut:

1. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{z}{z+1}$ di $z = -1$ adalah $q(z) = z$
2. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ di z=0 adalah $q(z) = \frac{e^z}{z+1}$
3. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)}$ di $z = -1$ adalah $q(z) = \frac{e^z}{z}$
4. dst...
5. Catatan: Fungsi sisa hanya dihitung di titik pole.

Fungsi sisa

Contoh lain:

1. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}$ di $z = 1$ adalah $\cdots = \cdots\cdots$
2. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+1)}$ di $z = -1$ adalah $\cdots = \cdots\cdots$
3. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{sin(z)}{z^2(z+1)}$ di $z = 0$ adalah $\cdots = \cdots\cdots$
4. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{sin(z)}{z^2(z+1)}$ di $z = -1$ adalah $\cdots = \cdots\cdots$

Residu

Nilai sisa atau residu suatu fungsi pada suatu pole adalah nilai dari fungsi sisa di pole tersebut. **Contoh** :

1. Fungsi sisa dari $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ di pole $z = 1$ adalah $q(z) = \frac{z}{z+1}$ dan nilai sisa dari fungsi sisa di pole $z = 1$ adalah

$$q(1) = \left.\frac{z}{z+1}\right|_{z=1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

2. dengan kata lain: residu f(z) di z = 1 adalah $\frac{1}{2}$.
3. Residu f(z) di $z = z_0$ dituliskan sebagai $Res_{z=z_0} f(z)$

Residu pada Pole orde 1 dan orde lebih dari 1

Fungsi

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$$

memiliki pole orde 1 di $z = -1$ dan z=-2.

Fungsi

$$f(z) = \frac{z}{(z+1)^2(z+2)^3}$$

memiliki pole orde 2 di $z = -1$ dan pole orde 3 di z=-2.

Menghitung residu di pole orde lebih dari 1 berbeda dengan menghitung residu di pole orde 1.

Menghitung Residu pada pole orde 1

Residu untuk pole orde 1 dihitung dengan menghitung nilai fungsi sisa pada titik pole (seperti yang telah dilakukan pada contoh sebelumnya).

Contoh lainnya:

1. Hitung residu $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z+1)}$ di pole $z = -1$
2. **Jawab:** pole $z = -1$ adalah pole orde 1.
3. Fungsi sisa di $z = -1$ adalah $q(z) = \frac{z}{z-1}$
4. residu f(z) di z = -1 adalah $q(-1) = \frac{1}{-1-1} = -\frac{1}{2}$.
5. dengan demikian $Res_{z=-1}(f(z)) = -\frac{1}{2}$

Menghitung Residu pada pole orde 1

Contoh lainnya:

1. Hitung residu $f(z) = \frac{\cos\ z}{z(z-1)(z+1)}$ di pole $z = 0$
2. **Jawab:** pole $z = 0$ adalah pole orde 1.
3. Fungsi sisa di $z = 0$ adalah $q(z) = \cdots\cdots$
4. residu f(z) di z = 0 adalah $q(0) = \cdots\cdots = \cdots\cdots$.
5. dengan demikian $Res_{z=0}(f(z)) = \cdots\cdots$

Menghitung Residu pada pole orde 1

Contoh lainnya:

1. Hitung residu $f(z) = \frac{\cos\ z}{ze^z}$ di pole $z = 0$
2. **Jawab:** pole $z = 0$ adalah pole orde 1.
3. Fungsi sisa di $z = 0$ adalah $q(z) = \cdots\cdots$
4. residu f(z) di z = 0 adalah $q(0) = \cdots\cdots = \cdots\cdots$.
5. dengan demikian $Res_{z=0}(f(z)) = \cdots\cdots$

Menghitung Residu pada pole orde n

Jika f(z) memiliki pole orde-n ($n>1$) di $z = z_0$, maka residu dihitung dengan:

$$Res_{z=z_0} = \frac{1}{(n-1)!} q^{n-1}(z)\Big|_{z=z_0}$$

Dengan $q^{n-1}(z)$ menyatakan turunan ke-(n-1) dari q(z) (fungsi sisa).

Menghitung Residu pada pole orde n

Contoh:

1. Hitung residu $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ di pole $z = 0$
2. **Jawab:** pole $z = 0$ adalah pole orde 2.
3. Fungsi sisa di $z = 0$ adalah $q(z) = \frac{1}{z-1}$
4. residu f(z) di z = 0 adalah
$$\frac{1}{(2-1)!} q'(z)\Big|_{z=0} = \frac{1}{(1)!} \frac{-1}{(z-1)^2}\Big|_{z=0} = \frac{-1}{(0-1)^2} = -1.$$
5. dengan demikian $Res_{z=0}(f(z)) = -1$

Menghitung Residu pada pole orde n

Contoh:

1. Hitung residu $f(z) = \frac{\cos z}{z^2(z-1)}$ di pole $z = 0$ dan di pole $z = 1$
2. **Jawab:** pole $z = 0$ adalah pole orde 2.
3. Fungsi sisa di $z = 0$ adalah $q(z) = \cdots\cdots$
4. residu f(z) di z = 0 adalah $\frac{1}{(2-1)!} q'(z)\Big|_{z=0} = \cdots\cdots\cdots$
5. dengan demikian $Res_{z=0}(f(z)) = \cdots$
6. pole $z = 1$ adalah pole orde 1.
7. Fungsi sisa di z=1 adalah $q(z) = \cdots$
8. Residu di z=1 adalah $q(1) = \cdots\cdots\cdots$
9. dengan demikian $Res_{z=1}(f(z)) = \cdots$

Latihan

1. diberikan : $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$
   1. fungsi sisa di $z = -1$ adalah ...
   2. fungsi sisa di $z = -2$ adalah ...
   3. nilai sisa atau residu di $z = -1$ adalah ...
   4. nilai sisa atau residu di $z = -2$ adalah ...
2. diberikan : $f(z) = \frac{e^z}{z(z+1)^3}$
   1. Residu di $z = 0$ adalah ...
   2. Residu di $z = -1$ adalah ...