

# Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 17 : Deret MacLaurin, Deret Taylor, dan Deret Laurent (Bagian III)  
Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

**Versi : Oktober 2018**

# Tujuan Perkuliahan

- 1 Mempelajari **ekspansi Laurent**
- 2 Mengekspansi dengan **fungsi rasional** dengan deret **Laurent** area kekonvergenannya

# Daftar Isi

## 1 Titik Singular dan Deret Laurent

## Titik singular

Pada fungsi rasional

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

nilai  $z$  yang menyebabkan  $Q(z) = 0$  disebut titik singular.  
Ekspansi Taylor tidak dapat dilakukan pada titik singular ini.

**Contoh:**

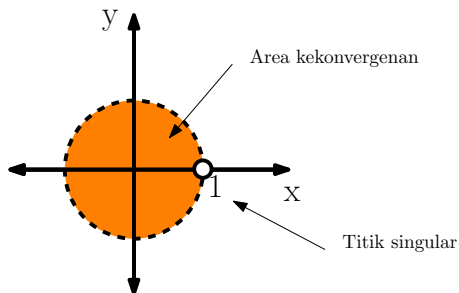
$f(z) = \frac{1}{1-z}$  memiliki titik singular :  $z = 1$ . Dengan demikian,  $f(z)$  tidak dapat diekspansi pada  $z = 1$  ini.

## Titik singular dan deret di sekitar titik tersebut

Ekspansi MacLaurin dari  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  adalah:

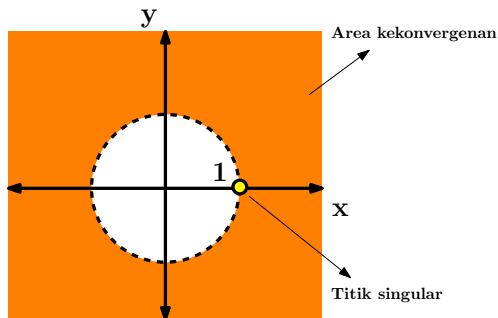
$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots$$

dengan  $|z| < 1$



## Titik singular dan deret di sekitar titik tersebut

Deret Laurent memungkinkan mengekspansi  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  dengan area kekonvergenan  $|z| > 1$  seperti gambar



yakni dengan mengekspansi  $\frac{1}{z}$  dari  $f(z)$  tersebut. Ini dicapai dengan menulis  $f(z)$  dalam bentuk  $\frac{1}{z}$ . Perhatikan contoh berikut:

## Deret Laurent

**Contoh:** tentukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{1}{1-z}$  dengan daerah kekonvergenan  $|z| > 1$ .

**Jawab:** Oleh karena daerah kekonvergenan  $|z| > 1$  (tanda lebih besar), maka  $f(z)$  harus ditulis dalam suku  $\frac{1}{z}$ :

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \frac{\frac{1}{z}}{\frac{1}{z} - 1} = \frac{-\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}}$$

ekspansi suku  $\frac{1}{z}$ :

$$\frac{-\frac{1}{z}}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z} \left( 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \left(\frac{1}{z}\right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan:  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$  atau  $|z| > 1$

## Deret Laurent

**Contoh:** tentukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{1}{1-2z}$  dengan daerah kekonvergenan  $|z| > \frac{1}{2}$ .

**Jawab:** Oleh karena daerah kekonvergenan  $|z| > \frac{1}{2}$  (tanda lebih besar), maka  $f(z)$  harus ditulis dalam suku  $\frac{1}{z}$ :

$$f(z) = \frac{1}{1-2z} = \frac{\frac{1}{2z}}{\frac{1}{2z} - 1} = \frac{\dots}{1 - \dots}$$

ekspansi suku  $\frac{1}{2z}$ :

$$\frac{\dots}{1 - \dots} = (\dots + \dots + \dots + \dots + \dots)$$

dengan area kekonvergenan:  $|\frac{1}{2z}| < 1$  atau  $|2z| > 1$  atau  $|z| > \frac{1}{2}$



## Deret Laurent

**Contoh:** tentukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{5}{2z-3}$  dengan daerah kekonvergenan  $|z| > \frac{3}{2}$ .

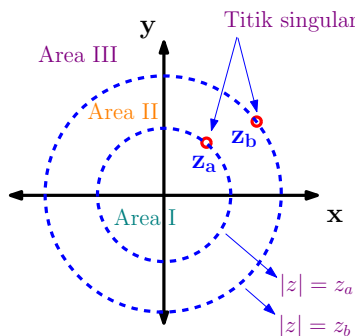
**Jawab:**

# Deret Laurent

Fungsi rasional dengan bentuk:

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_a)(z - z_b)} = \frac{A}{z - z_a} + \frac{B}{z - z_b}$$

memiliki dua titik singular:  $z_a$  dan  $z_b$ . Terdapat 3 daerah kekonvergenan yang mungkin:

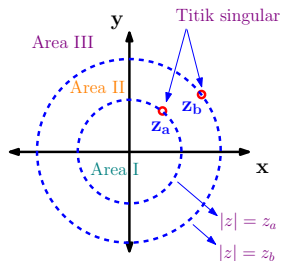


- $|z| < z_a$  dan  $|z| < z_b$   
(sebut saja **Area I**)
- $z_a < |z| < z_b$  (sebut saja **Area II**)
- $|z| > z_a$  dan  $|z| > z_b$   
(sebut saja **Area III**)

# Deret Laurent

Fungsi rasional dengan bentuk:

$$f(z) = \frac{P(z)}{(z - z_a)(z - z_b)} = \frac{A}{z - z_a} + \frac{B}{z - z_b}$$



- untuk **Area I**, suku  $\frac{A}{z - z_a}$  dan  $\frac{B}{z - z_b}$  diuraikan dalam  $z$
- untuk **Area II**, suku  $\frac{A}{z - z_a}$  diuraikan dalam  $\frac{1}{z}$  dan suku  $\frac{B}{z - z_b}$  diuraikan dalam  $z$
- untuk **Area III**, suku  $\frac{A}{z - z_a}$  dan  $\frac{B}{z - z_b}$  diuraikan dalam  $\frac{1}{z}$

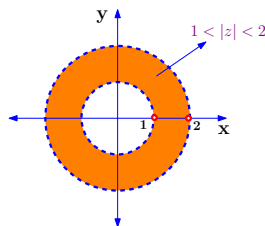
## Deret Laurent

**Contoh:** lakukan ekspansi Laurent dari

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

dengan daerah kekonvergenan  $1 < |z| < 2$

**Jawab :** Sederhanakan  $f(z)$  :  $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$



- untuk  $1 < |z| < 2$  (Area II), suku  $\frac{-1}{z-1}$  diuraikan dalam  $\frac{1}{z}$  dan suku  $\frac{1}{z-2}$  diuraikan dalam  $z$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\ &= \frac{1}{1-z} + \frac{\frac{1}{1}}{1-\frac{z}{2}} \end{aligned}$$

# Deret Laurent

Lanjutan Contoh:

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\
 &= \frac{1}{1-z} + \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} \\
 &= [1 + z + z^2 + z^3 + \dots] + \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \left(\frac{2}{z}\right)^3 + \dots \right]
 \end{aligned}$$

daerah kekonvergenan:  $|z| < 1$  **dan**  $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

## Deret Laurent

**Contoh:** lakukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$  dengan daerah kekonvergenan  $|z| > 2$

**Jawab :** Sederhanakan  $f(z)$  :  $f(z) = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-2} = \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2}$

Daerah kekonvergenan :  $|z| > 2$  atau ( $|z| > 1$  dan  $|z| > 2$ ) karena itu, suku  $\frac{-1}{z-1}$  dan  $\frac{1}{z-2}$  harus diekspansi dalam  $\frac{1}{z}$ .

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{-1}{z-1} + \frac{1}{z-2} = \frac{-\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}} + \frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}} \\ &= -\frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{1}{z} + \left(\frac{1}{z}\right)^2 + \dots \right] + \frac{1}{z} \left[ 1 + \frac{2}{z} + \left(\frac{2}{z}\right)^2 + \dots \right] \end{aligned}$$

dengan area kekonvergenan:  $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$  dan  $\left|\frac{2}{z}\right| < 1$

## Deret Laurent

**Contoh:** lakukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{5}{z^2+5z+4}$  dengan daerah kekonvergenan  $1 < |z| < 4$

**Jawab :** ...

## Deret Laurent

**Contoh:** lakukan ekspansi Laurent dari  $f(z) = \frac{1}{z} + \frac{2}{z+2} + \frac{3}{z+3}$   
dengan daerah kekonvergenan  $2 < |z| < 3$

**Jawab :** ...



# Latihan

Lakukan ekspansi Laurent dari deret berikut dengan daerah kekonvergenan yang diberikan:

1  $f(z) = \frac{1}{z+5}$  pada  $|z| > 5$

2  $f(z) = \frac{4}{2z+5}$  pada  $|z| > 5/2$

3  $f(z) = \frac{1}{z(z+1)}$  dengan  $0 < |z| < 1$

4  $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$   $|z| > 2$

5  $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$   $1 < |z| < 2$