



Telkom
University

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 16 : Deret MacLaurin, Deret Taylor, dan Deret Laurent (Bagian II)
Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Oktober 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Catatan awal

Pada Bagian I telah dibahas tentang

- 1 Ekspansi MacLaurin untuk fungsi $f(z)$
- 2 Ekspansi MacLaurin untuk fungsi rasional dengan bentuk

$$f(z) = \frac{1}{1 - kz}$$

beserta area **kekonvergenannya**

- 3 Pada bagian ini akan dilanjutkan dengan **ekspansi MacLaurin** dengan **fungsi rasional** yang lebih rumit serta **deret Taylor**

Tujuan Perkuliahan

- 1
- 2 Mempelajari **ekspansi MacLaurin** dengan **fungsi rasional** yang lebih rumit beserta area kekonvergenannya
- 3 mempelajari **deret Taylor**

Daftar Isi

1 Deret fungsi rasional

Deret fungsi rasional

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{3}{2-5z}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi: $f(z) = \frac{3/2}{1-\frac{5}{2}z}$

Bentuk ini dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{5}{2}z + \left(\frac{5}{2}z\right)^2 + \left(\frac{5}{2}z\right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan

$$\left| \frac{5}{2}z \right| < 1 \rightarrow |z| < \left| \frac{2}{5} \right|$$

Deret fungsi rasional

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{4}{2-z}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi: $f(z) = \frac{\dots}{\dots z}$

Bentuk ini dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \dots \left(\dots + \frac{\dots}{\dots} z + \left(\frac{5}{2}z\right)^2 + \left(\frac{5}{2}z\right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan

$$\left| \frac{5}{2}z \right| < 1 \rightarrow |z| < \left| \frac{2}{5} \right|$$

Deret fungsi rasional (II)

Tinjau fungsi rasional dengan bentuk:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b + ez}{c - dz^2}$$

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z) = \frac{b/c + ez/c}{1 - \frac{d}{c}z^2}$$

Bentuk ini dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \frac{b + ez}{c} \left(1 + \frac{d}{c}z^2 + \left(\frac{d}{c}z^2\right)^2 + \left(\frac{d}{c}z^2\right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan

$$\left| \frac{d}{c}z^2 \right| < 1 \rightarrow |z| < \sqrt{\left| \frac{c}{d} \right|}$$

Barisan dan Deret

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{3}{2-5z^2}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi: $f(z) = \frac{3/2}{1-\frac{5}{2}z^2}$

Bentuk ini dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \frac{3}{2} \left(1 + \frac{5}{2}z^2 + \left(\frac{5}{2}z^2\right)^2 + \left(\frac{5}{2}z^2\right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan

$$\left| \frac{5}{2}z^2 \right| < 1 \rightarrow |z| < \sqrt{\frac{2}{5}} =$$

Deret fungsi rasional

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{4}{2-z^2}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi: $f(z) = \frac{\dots}{\dots z^2}$

Bentuk ini dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \dots \left(\dots + \frac{\dots}{\dots} z^2 + \left(\frac{\dots}{\dots} z^2 \right)^2 + \left(\frac{\dots}{\dots} z^2 \right)^3 + \dots \right)$$

dengan area kekonvergenan

$$\left| \frac{\dots}{\dots} z^2 \right| < 1 \rightarrow |z| < \sqrt{\frac{\dots}{\dots}}$$

Deret fungsi rasional

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{3}{6+z^2}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

.....

Deret fungsi rasional

Contoh:

Tuliskan ekspansi MacLaurin dari $f(z) = \frac{1+2z}{3+2z^2}$ beserta area ke konvergenannya.

Jawab:

.....

Deret fungsi rasional (III)

Tinjau fungsi rasional dengan bentuk:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{d + ez}{az^2 + bz + c}$$

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z) = \frac{d + ez}{(z + p_1)(z + p_2)} + \frac{A}{p_1 + z} + \frac{B}{p_2 + z}$$

dan disederhanakan lagi menjadi:

$$f(z) = \frac{\frac{A}{p_1}}{1 + \frac{1}{p_1}z} + \frac{\frac{B}{p_2}}{1 + \frac{1}{p_2}z}$$

Bentuk terakhir dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \left[\frac{A}{p_1} \left(1 + \frac{-1}{p_1}z + \left(\frac{-1}{p_1}z \right)^2 + \dots \right) \right] + \left[\frac{B}{p_2} \left(1 + \frac{-1}{p_2}z + \left(\frac{-1}{p_2}z \right)^2 + \dots \right) \right]$$

dengan area kekonvergenan: $\left| \frac{1}{p_1}z \right| < 1$ **dan** $\left| \frac{1}{p_2}z \right| < 1$

Deret fungsi rasional (III)

Contoh : Ekspansikan $f(z) = \frac{1+2z}{z^2+3z+2}$

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z) = \frac{1+2z}{(z+1)(z+2)} = \frac{A}{z+1} + \frac{B}{z+2}$$

Setelah disederhanakan dan disamakan koefisien pembilang diperoleh: $A = -1$ dan $B = 3$ sehingga:

$$f(z) = \frac{-1}{z+1} + \frac{3}{z+2} = \frac{-1}{1+z} + \frac{\frac{3}{2}}{1+\frac{1}{2}z} = \frac{-1}{1-(-z)} + \frac{\frac{3}{2}}{1-(-\frac{1}{2}z)}$$

Bentuk terakhir dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = [-(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)] + \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2}z + \left(\frac{1}{4}z\right)^2 - \left(\frac{1}{8}z\right)^3 + \dots\right)\right]$$

dengan area kekonvergenan: $|-z| < 1$ dan $|\frac{1}{2}z| < 1$

area kekonvergenan: $|-z| < 1$ dan $|\frac{1}{2}z| < 1$ dapat disederhanakan menjadi:

$$|z| < 1 \text{ dan } |\frac{1}{2}z| < 1, \text{ atau} \\ |z| < 1 \text{ dan } |z| < 2$$

Area yang memenuhi keduanya adalah: $|z| < 1$

Dengan demikian $f(z) = \frac{1+2z}{z^2+3z+2}$

dapat diekspansi menjadi

$$f(z) = [-(1 - z + z^2 - z^3 + \dots)] + \left[\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{8}z^3 + \dots \right) \right]$$

dengan area kekonvergenan: $|z| < 1$

Deret fungsi rasional (III)

Contoh : Ekspansikan $f(z) = \frac{5}{z^2+9z+20}$

Jawab:

Bentuk ini dapat disederhanakan menjadi:

$$f(z) = \frac{5}{(z+4)(z+5)} = \frac{A}{z+4} + \frac{B}{z+5}$$

Setelah disederhanakan dan disamakan koefisien pembilang diperoleh: $A = \dots$ dan $B = \dots$ sehingga:

$$f(z) = \dots$$

Bentuk terakhir dapat diekspansi menjadi:

$$f(z) = \dots$$

dengan area kekonvergenan: $|\dots z| < 1$ dan $|\dots z| < 1$

Deret Taylor

Jika deret MacLaurin mengekspansi $f(z)$ pada $z = 0$, maka deret Taylor mengekspansi $f(z)$ pada $(z - z_0)$

Deret Taylor

Taylor menyatakan bahwa setiap fungsi riil $f(z)$ yang **differentiable** $z = 0$ dapat diuraikan menjadi deret polinomial:

$$f(x) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + a_3(z - z_0)^3 + \dots$$

dengan

$$a_n = \frac{1}{n!} f^n(z_0)$$

Dengan $f^n(z)$ menyatakan turunan ke- n dari $f(z)$.

Deret Taylor

Meskipun ekspansi dengan deret Taylor dapat dilakukan dengan menggunakan definisi, namun lebih mudah memanfaatkan hasil-hasil yang telah diperoleh dari ekspansi MacLaurin sebelumnya.

Deret Taylor

Contoh:

Uraikan $f(z) = e^z$ dalam deret Taylor pada $z=2$.

Jawab:

Dengan memanfaatkan hasil dari deret MacLaurin:

$$f(z) = e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \dots$$

Dengan demikian, ekspansi dari e^z pada $z=2$, dapat dilakukan dengan menuliskan:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^z = e^{(z-2)+2} = e^2 e^{z-2} \\ &= e^2 \left(1 + (z-2) + \frac{1}{2!}(z-2)^2 + \frac{1}{3!}(z-2)^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

Deret Taylor

Contoh: tentukan ekspansi Taylor dari $f(z) = \frac{1}{1-z}$ di $z=2$ beserta area kekonvergenannya.

Jawab: Munculkan suku $(z-2)$ pada $f(z)$ diperoleh:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1-z} = \frac{1}{1-(z-2+2)} = \frac{1}{-1-(z-2)} = \frac{-1}{1+(z-2)} \\ &= -1(1-(z-2) + (z-2)^2 - (z-2)^3 + \dots) \end{aligned}$$

dengan area kekonvergenan

$$|z-2| < 1$$

atau

$$|z| < \frac{1}{|2|} = \frac{1}{2}$$

Latihan

- 1 Lakukan ekspansi MacLaurin beserta daerah kekonvergenan dari fungsi $f(z) = \frac{6}{6z+1}$
- 2 Lakukan ekspansi MacLaurin beserta daerah kekonvergenan dari fungsi $f(z) = \frac{\cos z}{z+1}$
- 3 Lakukan ekspansi MacLaurin beserta daerah kekonvergenan dari fungsi $f(z) = \frac{z}{z^2+3z+2}$
- 4 Lakukan ekspansi Taylor dari fungsi $f(z) = \cos 2z$ pada $z = 1$
- 5 Lakukan ekspansi Taylor dari fungsi $f(z) = \frac{6}{3-2z}$ pada $z = 3$ beserta daerah kekonvergenannya