Jawaban UTS
Variabel Kompleks
Semester Ganjil 2018/2019
S1 Teknik Telekomunikasi

CLO : Bilangan kompleks, representasi, dan operasinya
PLO 2 : Mempunyai pengetahuan dan kemampuan untuk menggunakan ilmu dasar matematika, sains, dan rekayasa

Soal 1 : (30 Pt) **Nama** : . . . . **NIM** : . . . . Skor : . . . . . .

Diketahui: $tan^{-1}\sqrt{3} = 60^0$. Jika $z_1 = i\sqrt{3}$ dan $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$, dan $z_3 = 25e^{i30^0}$, maka hitung/tentukan:

a) (**5pt**) modulus dari z_2: $|z_2| = \cdots$

Jawab: $|z_2| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$

b) (**5pt**) argumen dari z_2: $Arg(z_2) = \cdots$

Jawab: Kuadran 4

$Arg(z_2) = tan^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = 360^\circ - 60^\circ = 300^\circ$

$= -60^\circ$

c) (**5pt**) $z_1\overline{z_2} = \cdots$

Jawab: $z_1 \cdot \overline{z_2} = i\sqrt{3}\,(1 + i\sqrt{3}) = i\sqrt{3} - \sqrt{3}^2 = -3 + i\sqrt{3}$

d) (**5pt**) $\frac{z_1}{z_2} = \cdots$

Jawab: $\frac{i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \cdot \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3} - \sqrt{3}^2}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \frac{-3 + i\sqrt{3}}{4} = -\frac{3}{4} + i\frac{\sqrt{3}}{4}$

e) (**5pt**) Sederhanakan: $z_3^{100} = \cdots$

Jawab: $z_3^{100} = (25 \cdot e^{i.30})^{100} = 25^{100} \cdot e^{i3000^\circ} = 25^{100} \cdot e^{i(3000^\circ - 8 \cdot 360^\circ)}$

$= 25^{100} \cdot e^{i(3000 - 2880^\circ)} = 25^{100} \cdot e^{i120^\circ}$

$= 25^{100} (\cos 120^\circ + i \sin 120^\circ)$

$= -\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot 25^{100} + i\,\frac{1}{2} \cdot 25^{100}$

f) (**5pt**) $\sqrt{z_3} = \cdots$

Jawab:

$\sqrt{z_3} = \sqrt{25 \cdot e^{i(30^\circ + k.360^\circ)}}$

$= 5 \cdot e^{i(15^\circ + k.180^\circ)}$

$k = 0 \Rightarrow \sqrt{z_3} = 5 \cdot e^{i15^\circ} = 5\cos 15^\circ + i\,5 \sin 15^\circ$

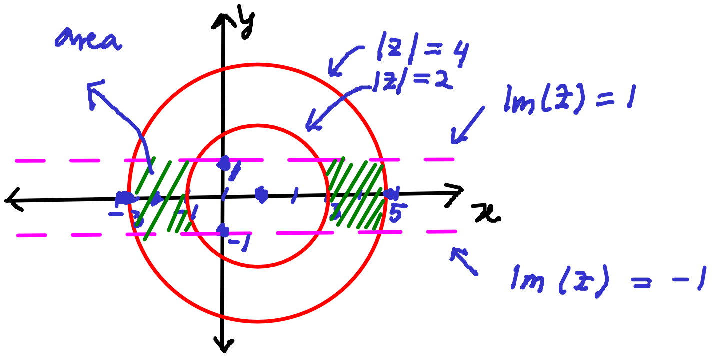
$k = 1 \Rightarrow \sqrt{z_3} = 5 \cdot e^{i(15^\circ + 180^\circ)} = 5\cos 195^\circ + i \cdot 5 \sin 195^\circ$

CLO : Area dan fungsi kompleks

PLO 2 : Mempunyai pengetahuan dan kemampuan untuk menggunakan ilmu dasar matematika, sains, dan rekayasa

Soal 2 : (25 Pt) **Nama** : . . . . **NIM** : . . . . Skor : . . . . . .

a) (10pt) Sketsalah daerah yang memenuhi $2 \le |z-1| \le 4$ **dan** $-1 < Im(z) < 1$.



b) (**5pt**) Inverse dari fungsi $f(z) = \frac{2z}{2z-1}$ adalah . . .

Jawab: $f(z) = w = \frac{2z}{2z-1}$, misal invers : $g(z)$

ganti $\left.\begin{array}{l} w \to z \\ z \to w \end{array}\right\} \to$ $z = \frac{2w}{2w-1}$ $\Leftrightarrow z(2w-1) = 2w$

$\Leftrightarrow 2zw - z - 2w = 0$

$\Leftrightarrow w(2z-2) = z$

$\Leftrightarrow w = \frac{z}{2z-2}$

sehingga $g(z) = \frac{z}{2z-2}$

c) (**10pt**) Bentuk terurai dari $f(z) = e^z - e^{-z}$ adalah $f(x+iy) = \cdots$

Jawab:

$$
\begin{aligned}
f(x+iy) &= e^{x+iy} - e^{-(x+iy)} \\
&= e^x \cdot e^{iy} - e^{-x} \cdot e^{-iy} \\
&= e^x(\cos y + i \sin y) - e^{-x} \cdot (\cos y - i \sin y) \\
&= e^x \cos y - e^{-x} \cos y + i(e^x \sin y + e^{-x} \cdot \sin y) \\
&= (e^x - e^{-x}) \cos y + i(e^x + e^{-x}) \cdot \sin y
\end{aligned}
$$

CLO : Turunan fungsi kompleks
PLO 2 : Mempunyai pengetahuan dan kemampuan untuk menggunakan ilmu dasar matematika, sains, dan rekayasa

Soal 3 : (25 Pt)	**Nama** :	**NIM** :	Skor : ......

Diberikan fungsi kompleks : $f(x+iy) = U + iV = e^x \cos\ y + i(e^x \sin\ y + 7)$

a) (5pt) Tunjukkan bahwa U dan V harmonik!

Jawab:

$u_x = e^x \cos y \qquad u_y = -e^x \sin y$

$u_{xx} = e^x \cos y \qquad u_{yy} = -e^x \cos y$

$u_{xx} + u_{yy} = 0$

$\therefore$ u harmonik

$V_x = e^x \sin y \qquad V_y = e^x \cos y$

$V_{xx} = e^x \sin y \qquad V_{yy} = -e^x \sin y$

$V_{xx} + V_{yy} = 0$

$\therefore$ V harmonik

b) (**5pt**) Tunjukkan bahwa $f(x+iy)$ tersebut holomorfik!

Jawab:

$u_x = e^x \cos y \qquad V_x = e^x \sin y$

$u_y = -e^x \sin y \qquad V_y = e^x \cos y$

PCR 2, PCR 1

PCR 1 : $u_x = v_y$

Terpenuhi

PCR 2 : $u_y = -V_x$

Terpenuhi

Karena itu $f(x+iy)$ holomorfik

c) (**5pt**) $f'(x+iy)$ adalah ...

$$f'(x+iy) = u_x + i\, v_x$$
$$= \underline{\underline{e^x \cos y + i \cdot e^x \sin y}}$$

d) (**10pt**) Dengan metode Milne-Thomson, tentukan $f(z)$.

Jawab: $f'(x+iy) = e^x \cos y + i\, e^x \sin y$

Milne Thomson : $\rightarrow f'(x+iy) \rightarrow f'(z)$

$x \rightarrow z$

$y \rightarrow 0$

$\therefore f(z) = e^z \cos 0 + i \cdot e^z \sin 0$

$= e^z$

Integrasi $f'(z) \rightarrow \quad f(z) = e^z + c$

mencari c : $\rightarrow f(x+iy) = e^{x+iy} + c = e^x \cos y + i\, e^x \sin y + c$

Bandingkan dengan $f(x+iy)$ semula, diperoleh $c = i7 \Rightarrow \underline{\underline{f(z) = e^z + i7}}$

CLO : Integrasi fungsi kompleks

PLO 2 : Mempunyai pengetahuan dan kemampuan untuk menggunakan ilmu dasar matematika, sains, dan rekayasa

Soal 4 : (25 Pt) **Nama** : . . . . **NIM** : . . . . Skor : . . . . . .

a) (**10pt**) Hitung $\int_l z\, dz$ dengan lintasan l berupa garis lurus yang menghubungkan titik $z_A = 0 + i0$ ke titik $z_B = 2 + i$.

Jawab: $f(z) = z$ fungsi entire, sehingga $\int z\, dz$ tidak bergantung lintasan :

$$\int_l z\, dz = \int_0^{2+i} z\, dz = \frac{1}{2} z^2 \Big|_0^{2+i} = \frac{1}{2}(2+i)^2 - \frac{1}{2}(0)^2$$

$$= \frac{1}{2}(4+4i-1) - 0 = \frac{3}{2} + 2i$$

Soal b) sampai d) gunakan informasi berikut: akan dihitung $\oint_C f(z)dz$ dengan $f(z) = \frac{3z}{z^2+1}$ dan lintasan C: $|z - i| = 1$ bergerak berlawanan arah jarum jam.

b) (**5pt**) Jika $f(z) = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i}$, maka nilai A dan B adalah . . .

$$\frac{3z}{z^2+1} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{Az - iA + Bz + iB}{(z+i)(z-i)} = \frac{z(A+B) + i(-A+B)}{z^2+1}$$

Samakan koef penyebut :

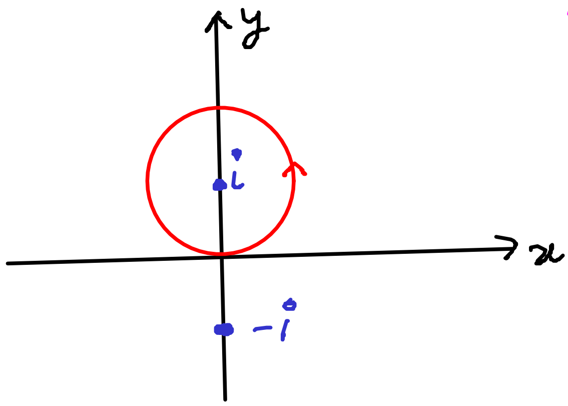
$$A + B = 3$$
$$-A + B = 0$$
$$2B = 3 \Rightarrow B = \frac{3}{2}$$

$$A = B = \frac{3}{2}$$

$$A = \frac{3}{2} \qquad B = \frac{3}{2}$$

c)(**5pt**) Gambarkan lintasan C beserta titik-titik singular dari $f(z)$.

Jawab:



Titik singular : Penyebut = 0

$z^2 + 1 = 0 \Rightarrow z = -i$

$(z+i)(z-i) = 0$ atau $z = i$

d) (**5pt**) Hitung $\oint_C \frac{3z}{z^2+1} dz$ tersebut.

Jawab:

di luar area lintasan

$$\oint_C \frac{3z}{z^2+1} dz = \oint_C \frac{\frac{3}{2}}{z+i} dz + \oint_C \frac{\frac{3}{2}}{z-i} dz = 0 + 2\pi i \cdot \frac{3}{2}\Big|_{z=i}$$

$$= 3\pi i$$