

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 12 : Integral tertutup pada fungsi rasional dengan titik singular orde tinggi

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

Tujuan Perkuliahan

Kuliah ini membahas integral tertutup pada fungsi rasional dengan titik singular orde tinggi (lebih dari 1)

Catatan awal

- 1 Pada kuliah sebelumnya telah dibahas tentang :
- 2 sifat integral tak tergantung lintasan
- 3 integral dengan lintasan tertutup
- 4 integral fungsi rasional dengan titik singular orde 1
- 5 Pada bagian ini dilanjutkan dengan titik singular orde tinggi (> 1)

Daftar Isi

- 1 Menguraikan fungsi rasional
- 2 Integral tertutup titik singular orde tinggi

Menguraikan fungsi rasional

Menguraikan bentuk $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dengan titik singular orde 1:

1 Misalkan: $f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)\cdots(z-z_N)}$

2 Pangkat tertinggi $P(z) < N$

3 Maka $f(z)$ dapat diuraikan menjadi:

4 $f(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{A_2}{z-z_2} + \cdots + \frac{A_N}{z-z_N}$

5 Dengan menyederhanakan persamaan di atas dan menyamakan koefisien pembilang dengan persamaan semula, diperoleh A_i

Menguraikan fungsi rasional

Contoh: uraikan $f(z) = \frac{5}{z(z+1)}$

Jawab:

① $f(z) = \frac{5}{z(z+1)} = \frac{A_1}{z} + \frac{A_2}{z+1}$

② sederhanakan menjadi: $\frac{A_1(z+1)}{z(z+1)} + \frac{A_2(z)}{z(z+1)} = \frac{A_1+(A_1+A_2)z}{z(z+1)}$

③ samakan dengan $f(z)$ semula, diperoleh: $A_1 = 5$,
 $A_1 + A_2 = 0 \rightarrow A_2 = -5$

Menguraikan fungsi rasional

Contoh 2: uraikan $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)}$

Jawab:

1 $f(z) = \frac{z}{(z+1)(z+2)} = \frac{A_1}{z+1} + \frac{A_2}{z+2}$

2 ...

3 ...

Menguraikan fungsi rasional

Integral tertutup dapat memanfaatkan penguraian fungsi rasional.

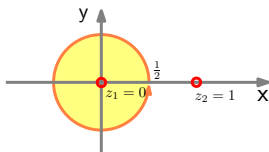
Contoh 3: hitung $\oint \frac{5}{z(z+1)} dz$

dengan lintasan berupa lingkaran $|z| = \frac{1}{2}$ berlawanan arah jarum jam. **Jawab:**

- 1 dengan memanfaatkan hasil penguraian, maka:

$$\oint \frac{5}{z(z+1)} dz = \oint \left(\frac{5}{z} - \frac{5}{z+1} \right) dz = \oint \left(\frac{5}{z} \right) dz - \oint \left(\frac{5}{z+1} \right) dz$$

- 2 Lintasan dan titik singular:



3 $\oint \left(\frac{5}{z} \right) dz - \oint \left(\frac{5}{z+1} \right) dz = 2\pi i 5 - 0 = 10\pi i$

Menguraikan fungsi rasional

Integral tertutup dapat memanfaatkan penguraian fungsi rasional.

Contoh 4: hitung $\oint \frac{5}{z(z+1)} dz$

dengan lintasan berupa lingkaran $|z| = 2$ berlawanan arah jarum jam. **Jawab:**

$$\textcircled{1} \quad \oint \frac{5}{z(z+1)} dz = \oint \left(\frac{5}{z} - \frac{5}{z+1} \right) dz = \oint \left(\frac{5}{z} \right) dz - \oint \left(\frac{5}{z+1} \right) dz$$

$\textcircled{2}$ Lintasan dan titik singular:

$$\textcircled{3} \quad \oint \left(\frac{5}{z} \right) dz - \oint \left(\frac{5}{z+1} \right) dz = \dots - \dots = \dots$$

Menguraikan fungsi rasional

Menguraikan bentuk $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ dengan salah satu titik singular berorde 2:

- 1 Misalkan salah satu pangkat dari : $f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_1)(z-z_2)^2}$
- 2 Pangkat tertinggi $P(z)$ kurang dari pangkat tertinggi $Q(z)$
- 3 Maka $f(z)$ diuraikan menjadi:
- 4 $f(z) = \frac{A_1}{z-z_1} + \frac{B_0}{(z-z_2)^2} + \frac{B_1}{(z-z_2)}$
- 5 Koefisien A_1 , B_0 dan B_1 diperoleh dari menyederhanakan bentuk di atas dan menyamakan dengan persamaan semula

Menguraikan fungsi rasional

Contoh: uraikan $f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2}$

Jawab:

$$\textcircled{1} f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{(z+1)}$$

$\textcircled{2}$ sederhanakan menjadi:

$$\frac{A_1(z+1)^2}{z(z+1)^2} + \frac{B_0z}{z(z+1)^2} + \frac{B_1z(z+1)}{z(z+1)^2} = \frac{A_1 + (2A_1 + B_0 + B_1)z + (A_1 + B_1)}{z(z+1)^2}$$

$\textcircled{3}$ samakan dengan $f(z)$ semula, diperoleh: $A_1 = 5$,
 $2A_1 + B_0 + B_1 = 0$ dan $A_1 + B_1 = 0$

$\textcircled{4}$ selesaikan, diperoleh: $A_1 = 5$, $B_1 = -5$, $B_0 = -5$

$$\textcircled{5} f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{(z+1)} = \frac{5}{z} + \frac{-5}{(z+1)^2} + \frac{-5}{(z+1)}$$

Menguraikan fungsi rasional

Contoh: uraikan $f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2}$

Jawab:

$$\textcircled{1} f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{(z+1)}$$

$\textcircled{2}$ sederhanakan menjadi:

$$\frac{A_1(z+1)^2}{z(z+1)^2} + \frac{B_0z}{z(z+1)^2} + \frac{B_1z(z+1)}{z(z+1)^2} = \frac{A_1 + (2A_1 + B_0 + B_1)z + (A_1 + B_1)}{z(z+1)^2}$$

$\textcircled{3}$ samakan dengan $f(z)$ semula, diperoleh: $A_1 = 5$,
 $2A_1 + B_0 + B_1 = 0$ dan $A_1 + B_1 = 0$

$\textcircled{4}$ selesaikan, diperoleh: $A_1 = 5$, $B_1 = -5$, $B_0 = -5$

$$\textcircled{5} f(z) = \frac{5}{z(z+1)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{(z+1)} = \frac{5}{z} + \frac{-5}{(z+1)^2} + \frac{-5}{(z+1)}$$

Menguraikan fungsi rasional

Contoh: uraikan $f(z) = \frac{5z}{(z+1)(z+2)^2}$

Jawab:

①

Menguraikan fungsi rasional

Untuk pangkat 3 dan seterusnya, permisalannya sama.

Contoh: uraikan $f(z) = \frac{5}{z(z+2)^3}$

Jawab:

$$\textcircled{1} f(z) = \frac{5}{z(z+1)^3} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^3} + \frac{B_1}{(z+1)^2} + \frac{B_2}{(z+1)}$$

$\textcircled{2}$

Integral tertutup yang mengitari titik singular orde tinggi

- 1 Untuk menghitung integral tertutup yang mengitari titik singular orde tinggi, maka digunakan sifat **Integral Cauchy** berikut:

- 2
$$\oint \frac{P(z)}{z-z_0} = 2\pi i P(z) \Big|_{z=z_0}$$

- 3
$$\oint \frac{P(z)}{(z-z_0)^2} = \frac{1}{2!} 2\pi i P'(z) \Big|_{z=z_0}$$

- 4
$$\oint \frac{P(z)}{(z-z_0)^3} = \frac{1}{3!} 2\pi i P''(z) \Big|_{z=z_0}$$

- 5

Contoh:

Hitung integral tertutup: $\oint \frac{5}{z(z+1)^2} dz$

dengan lintasan $|z| = 2$ berlawanan arah jarum jam

Jawab:

- ① dari contoh sebelumnya kita peroleh:

$$\frac{5}{z(z+1)^2} = \frac{A_1}{z} + \frac{B_0}{(z+1)^2} + \frac{B_1}{(z+1)} = \frac{5}{z} + \frac{-5}{(z+1)^2} + \frac{-5}{(z+1)}$$

- ② dengan demikian: $\oint \frac{5}{z(z+1)^2} dz = \oint \left(\frac{5}{z} + \frac{-5}{(z+1)^2} + \frac{-5}{(z+1)} \right) dz$

- ③ $\oint \frac{5}{z} dz + \oint \frac{-5}{(z+1)^2} dz + \oint \frac{-5}{(z+1)} dz = 5 \cdot 2\pi i + \oint \frac{-5}{(z+1)^2} dz + -5 \cdot 2\pi i$

- ④ $\oint \frac{-5}{(z+1)^2} dz$ dihitung dengan : $\oint \frac{P(z)}{(z-z_0)^2} = \frac{1}{2!} 2\pi i P'(z) \Big|_{z=z_0}$

dengan $P(z) = -5$ maka $P'(z) = 0$ sehingga $\oint \frac{-5}{(z+1)^2} dz = 0$

- ⑤ $\oint \frac{5}{z} dz + \oint \frac{-5}{(z+1)^2} dz + \oint \frac{-5}{(z+1)} dz = 5 \cdot 2\pi i + 0 + -5 \cdot 2\pi i = 0$

Contoh:

Hitung integral tertutup: $\oint \frac{z}{(z-1)^3} dz$

dengan lintasan $|z| = 2$ berlawanan arah jarum jam

Jawab:

①

Contoh:

Hitung integral tertutup: $\oint \frac{\sin z}{z(z-1)^2} dz$

dengan lintasan $|z| = \frac{1}{2}$ berlawanan arah jarum jam

Jawab:

①

Latihan

1 Hitung $\oint \frac{5z}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, dengan lintasan

1 C : $|z| = \frac{1}{2}$

2 C : $|z| = \frac{3}{2}$

3 C : $|z| = 4$

2 Hitung $\oint \frac{5 \cos z}{(z-1)(z-2)}$ dengan lintasan

1 C : $|z| = 0.5$

2 C : $|z| = 1.5$

3 Hitung $\oint \frac{z^3}{(z+1)(z+i)^3}$ dengan lintasan C : $|z| = 2$