Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 11 : Integral Tak Bergantung Lintasan dan Integral Bergantung Lintasan

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari kuliah kali ini adalah memaparkan **Integral tak tergantung lintasan** dan **Integral bergantung lintasan**

Catatan awal

1. Pada umumnya menghitung integral kompleks dilakukan dengan menguraikan integral tersebut ke dalam integral bagian riil dan integral bagian kompleks dengan persamaan parameter lintasan dalam t.
2. Namun perhitungan integral kompleks dapat dengan mudah dilakukan dengan memperhatikan sifat-sifat integral pada fungsi entire, rumus integral Cauchy, dan sebagainya.

Daftar Isi

Integral tak bergantung lintasan

1. Pada fungsi riil,

$$\int_{x_A}^{x_b} f(x)dx = F(x_B) - F(x_A)$$

2. Pada fungsi kompleks, hal tersebut berlaku pula:

$$\int_{z_A}^{z_B} f(z)dz = F(z_B) - F(z_A)$$

3. Ini berarti bahwa jika $f(z)$ entire, maka integral kompleks tidak bergantung lintasan, namun hanya pada titik awal dan titik akhir lintasan saja.

Contoh 1:

1. Ulangi lagi menghitung integral dari Slide 9 sebelumnya:

$$\int_l (2z+5)dz$$

dengan lintasan l berupa garis lurus dari (0,0) ke (4,2)

Jawab:

2. $f(z) = 2z + 5$ adalah fungsi entire, maka integral hanya tergantung titik awal $z = 0 + i0$ dan titik akhir $z = 4 + i2$

$$\begin{aligned}\int_l (2z+5)dz &= \int_{0+i0}^{4+i2} (2z+5)dz \\ &= \left(z^2+5z\right)\Big|_{0+i0}^{4+i2} \\ &= \left[(4+2i)^2 + 5(4+2i)\right] - \left[(0)^2 + 5(0)\right] \\ &= [16 + i16 - 4 \ + \ 20 + 10i] - 0 = 32 + i26\end{aligned}$$

Contoh 2:

1. Hitung:

$$\int_l z \, dz$$

dengan lintasan l berupa kurva $z = t + it^2$ dengan $1 \leq t \leq 3$

Jawab:

2. ....

Contoh 3:

1. Hitung:

$$\int_l e^{2z}\, dz$$

dengan lintasan l : $z = t + it$ dengan $0 \leq t \leq 1$ **Jawab**:

2. ....

Contoh 4:

1. Hitung:

$$\int_l [(2x+6)+i2y]\,(dx+idy)$$

dengan lintasan l : $z = t + it$ dengan $0 \leq t \leq 1$ **Jawab**:

2. f(x+iy)=(2x+6)+i2y memenuhi PCR untuk setiap x dan y, oleh karena itu f(x+iy) entire. Dengan metode Milne-Thomson diperoleh $f(z) = 2z + 6$

3. dengan demikian :

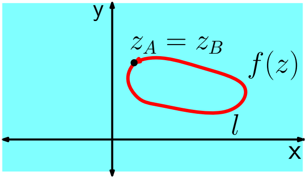
$$\int_l [(2x+6)+i2y]\,(dx+idy) = \int_{0+i0}^{1+i} [2z+6]\,dz = \left(z^2+6z\right)\Big|_{0+i0}^{1+i}$$

....

Integral lintasan tertutup

1. Jika lintasan l tertutup, maka notasi integral dituliskan :

$$\oint_l f(z)\, dz$$



2. Lintasan tertutup memiliki titik awal (z_A) dan titik ujung (z_B) berimpit.
3. oleh karena z_B=z_A, jika f(z) bersifat entire, maka

$$\oint_l f(z)\, dz = \int_{z_A}^{z_A} f(z)\, dz = F(z_A) - F(z_A) = 0$$

Contoh 5:

1. Hitung:

$$\oint_l z\, dz$$

dengan lintasan l berupa kurva

$$|z| = 1$$

Jawab:

2. f(z)=z adalah fungsi entire, karena itu

$$\oint_l z\, dz = 0$$

Integral fungsi rasional

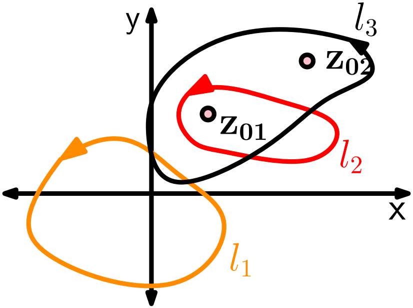
1. Fungsi rasional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$
2. Fungsi rasional $f(z)$ analitik pada semua titik, kecuali di titik singular.
3. Integral fungsi rasional tidak tergantung lintasan, asalkan lintasan tidak memuat titik singular.
4. Yang menarik adalah lintasan tertutup, karena ada beberapa kemungkinan terkait lintasan dan titik singular.

Integral fungsi rasional

1. Fungsi rasional $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$
2. Fungsi rasional $f(z)$ analitik pada semua titik, kecuali di titik singular.
3. Integral fungsi rasional tidak tergantung lintasan, asalkan lintasan tidak memuat titik singular.
4. Yang menarik adalah lintasan tertutup, karena ada beberapa kemungkinan terkait titik singular.

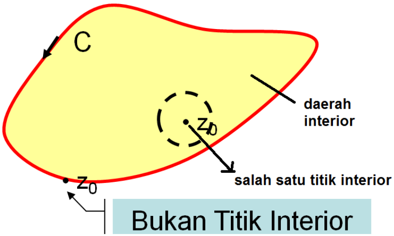
Integral fungsi rasional

Beberapa kemungkinan posisi titik singular dan lintasan: (z_{01} dan (z_{02}): titik singular).



Titik interior dan daerah interior

1. Titik z_0 disebut titik interior dari lintasan tutup C bila terdapat lingkungan dari z_0 yang termuat di dalam C
2. Lintasan tertutup C arah positif : bila berjalan menyusuri lintasan maka daerah yang dilingkupi oleh C terletak di sebelah kiri.
3. Semua titik-titik interior membentuk daerah interior dari lintasan C
4. jika lintasan berlawanan arah jarum jam, maka daerah interior adalah di dalam kurva.



Integral fungsi rasional

Ditinjau bentuk khusus jika $Q(z) = z - z_0$:

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{P(z)}{(z - z_0)}$$

Titik singular: $z = z_0$

Akan dihitung:

$$\oint_C f(z)\, dz = \oint_C \frac{P(z)}{Q(z)}\, dz = \oint_C \frac{P(z)}{(z - z_{01})((z - z_{02}))}\, dz$$

pada suatu lintasan tertutup C:

1. Jika tidak terdapat titik singular di daerah interior lintasan, maka

$$\oint_C f(z)\, dz = 0$$

Integral fungsi rasional

2. Jika terdapat titik singular di daerah interior lintasan, maka

$$\oint_C f(z)\,dz = 2\pi i\, P(z)\Big|_{z=z_0}$$

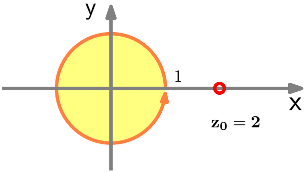
3. Rumus di atas disebut Rumus Integral Cauchy (RIC).

Contoh 5

Hitung: $\oint_C \frac{z}{z-2}\, dz$

dengan C: lintasan pada $|z| = 1$ dengan arah lintasan berlawanan arah jarum jam. **Jawab**:

1. Titik singular: $z - 2 = 0 \rightarrow z = 2$
2. Sketsa lintasan, area interior dan titik singular



3. titik singular berada di luar area interior, sehingga:

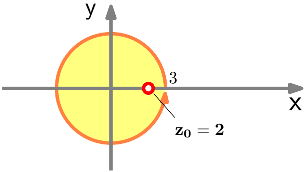
$$\oint_C \frac{z}{z-2}\, dz = 0$$

Contoh 6

Hitung: $\oint_C \frac{z}{z-2}\, dz$

dengan C: lintasan pada $|z| = 3$ dengan arah lintasan berlawanan arah jarum jam. **Jawab**:

1. Titik singular: $z - 2 = 0 \to z = 2$
2. Sketsa lintasan, area interior dan titik singular



3. titik singular berada di dalam area interior, sehingga:

$$\oint_C \frac{z}{z-2}\, dz = 2\pi\, i\, z \Big|_{z=2} = 4\pi i$$

Contoh 7

Hitung: $\oint_C \frac{z(z+1)}{(z-2)}\, dz$

dengan C: lintasan pada $|z| = 4$ dengan arah lintasan berlawanan arah jarum jam. **Jawab**:

1. Titik singular: $\cdots$
2. Sketsa lintasan, area interior dan titik singular
3. titik singular berada di $\cdots\cdots$ area interior, sehingga:

$$\oint_C \frac{z(z+1)}{z-2}\, dz = \cdots$$

Contoh 8

Hitung: $\oint_C \frac{1}{z(z-2)}\, dz$

dengan C: lintasan pada $|z| = 1$ dengan arah lintasan berlawanan arah jarum jam. **Jawab**:

1. Titik singular: $\cdots$
2. Sketsa lintasan, area interior dan titik singular

3. titik singular yang berada di dalam daerah interior adalah $z = \cdots\cdots$, sehingga:

$$\oint_C \frac{1}{z(z-2)}\, dz = \cdots$$

Latihan

1. Dengan lintasan l berupa garis lurus dari (1,1) ke (2,3) hitung
   1. $\int_l 2\ dz$
   2. $\int_l z\ dz$
   3. $\int_l (x + iy + 6)(dx + i\ dy)$
2. Hitung
$$\int_C z\ e^z dz$$
   dengan lintasan C: $z = 1$ berlawanan arah jarum jam
3. Hitung (gerakan lintasan berlawanan arah jarum jam):
   1. $\int_C \frac{z+1}{z+i}\ dz$ dengan C: $|z| = 0.5$
   2. $\int_C \frac{z+1}{z+i}\ dz$ dengan C: $|z| = 1.5$