

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 8 : Fungsi Bentuk Kompak,
Bentuk Terurai, Fungsi Harmonik,
Persamaan Cauchy-Riemann, dan
Fungsi Holomorfik (Bagian II)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah tentang **Fungsi Bentuk Kompak, Bentuk Terurai, Fungsi Harmonik, Persamaan Cauchy-Riemann, dan Fungsi Holomorfik** (Bagian II) ini adalah melanjutkan materi sebelumnya, yang kali ini difokuskan pada persamaan PCR sebagai syarat fungsi terurai differentiable, serta indikator bahwa kedua komponen **U** dan **V** adalah harmonik

Catatan awal

- 1 Pada materi Bagian I disebutkan bahwa syarat suatu fungsi terurai $f(x + iy) = U(x + iy) + V(x + iy)$ dapat dikembalikan ke bentuk kompak adalah
 - U dan V harmonik
 - U dan V memenuhi PCR
- 2 Pada Bagian II ini akan ditunjukkan bahwa, jika U dan V memenuhi PCR, maka otomatis U dan V adalah harmonik.
- 3 Dengan fakta ini, untuk menunjukkan $f(x + iy) = U(x + iy) + V(x + iy)$ dapat dikembalikan ke $f(z)$, maka cukup ditunjukkan bahwa U dan V memenuhi PCR.
- 4 Pernyataan:
 - 1 $f(x + iy) = U(x + iy) + V(x + iy)$ differentiable
 - 2 $f(x + iy) = U(x + iy) + V(x + iy)$ holomorfik
 - 3 U dan V memenuhi PCR
 - 4 $f(x + iy) = U(x + iy) + V(x + iy)$ dapat dikembalikan ke $f(z)$
 adalah pernyataan yang ekuivalen.

Daftar Isi

1 PCR dan Harmonik

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Persamaan Cauchy-Riemann berimplikasi pada keharmonisan fungsi U dan V :

- 1 $U(x,y)$ dan $V(x,y)$ pada $f(x + iy) = U(x) + iV(y)$ memenuhi PCR maka U dan V sudah pasti harmonik.
- 2 **Bukti:** Jika PCR terpenuhi, maka

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \quad (1)$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial V}{\partial x} \quad (2)$$

Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial V}{\partial y} \dots\dots\dots (2)$$

Turunkan ruas kiri dan kanan Pers.(1) terhadap x dan Pers.(2) terhadap y diperoleh:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} = \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = -\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \dots\dots\dots (4)$$

Jumlahkan (3) dan (4) persamaan diperoleh:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 U}{\partial^2 y} = 0$$

sehingga U harmonik.

- ③ Pembuktian V harmonik dapat dilanjutkan sebagai latihan.

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Jika $f(x+iy)$ memenuhi PCR, maka $f'(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$

1 **Contoh** : Tentukan turunan dari fungsi

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy. \text{ Jawab :}$$

2 $U_x=2x, U_y = -2y$

3 $V_x=2y, V_y = 2x$

4 PCR terpenuhi

5 $f'(x + iy) = U_x + iV_x=2x + i2y = 2(X + iY)$

Jika dilakukan pada bentuk kompak:

$$\begin{aligned} f(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy &\Rightarrow f(z) = z^2 \\ f'(x + iy) = 2(x + iy) &\Rightarrow f'(z) = 2z \end{aligned}$$

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Contoh lain : Tentukan turunan dari $f(x + iy) = x^2 + iy^2$, **Jawab** :

- 1 $U_x=2x, U_y = 0$
- 2 $V_x=0, V_y = 2y$
- 3 $U_x \neq V_y$ sehingga PCR tidak terpenuhi
- 4 Karena PCR tidak terpenuhi, maka $f(x + iy)$ tidak differentiable, atau $f'(x + iy)$ tidak ada.

Turunan fungsi dalam bentuk terurai

Contoh lain lagi: Tentukan turunan dari $f(x + iy) = xy - ixy$,
Jawab :

1 $U_x = \dots\dots\dots$, $U_y = \dots\dots\dots$

2 $V_x = \dots\dots\dots$, $V_y = \dots\dots\dots$

3

4

Mencari sekawan harmonik

PCR dapat digunakan untuk mencari **sekawan harmonik**.

$f(x + iy) = xy + iV(x, y)$. Tentukan $V(x, y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$. **Jawab** :

- 1 $U = xy$ adalah fungsi harmonik, oleh karena itu ada sekawan harmoniknya.
- 2 $U_x = y, U_y = x$
- 3 $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
- 4 PCR syarat 1 : $U_x = V_y \Rightarrow y = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = \frac{1}{2}y^2 + g(x)$
- 5 Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x : $\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$
- 6 PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow x = g'(x)$
- 7 $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
- 8 Sehingga: $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$, c suatu konstanta.

Mencari sekawan harmonik

PCR dapat digunakan untuk mencari **sekawan harmonik**.

$f(x + iy) = xy + iV(x, y)$. Tentukan $V(x, y)$ sekawan harmonik dari $U = xy$. **Jawab** :

- 1 $U = xy$ adalah fungsi harmonik, oleh karena itu ada sekawan harmoniknya.
- 2 $U_x = y, U_y = x$
- 3 $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}, V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$
- 4 PCR syarat 1 : $U_x = V_y \Rightarrow y = \frac{\partial V}{\partial y} \Rightarrow V = \frac{1}{2}y^2 + g(x)$
- 5 Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x : $\frac{\partial V}{\partial x} = g'(x)$
- 6 PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow x = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow x = g'(x)$
- 7 $g'(x) = x \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$
- 8 Sehingga: $V = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}y^2 + c$, c suatu konstanta.

Mencari sekawan harmonik

Contoh lain: Tentukan $V(x,y)$ sekawan harmonik dari $U = 5x + 7$.

Jawab :

- 1 Pertama periksa apakah U harmonik:

.....

- 2 $U_x = \dots\dots\dots$, $U_y = \dots\dots\dots$

- 3 $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$

- 4 PCR syarat 1 :

$$U_x = V_y \Rightarrow \dots\dots\dots \Rightarrow V = \dots\dots\dots$$

- 5 Turunkan V yang baru diperoleh terhadap x : $\frac{\partial V}{\partial x} = \dots\dots\dots$

- 6 PCR syarat 2 : $U_y = -V_x \Rightarrow \dots\dots\dots = -\frac{\partial V}{\partial x} \Rightarrow$

..... =

- 7 $g'(x) = \dots\dots\dots \Rightarrow g(x) = \dots\dots\dots$

- 8 Sehingga: $V = \dots\dots\dots$

Mencari sekawan harmonik

Contoh lain lagi: Adakah $V(x,y)$ yang merupakan sekawan harmonik dari $U = x^2$? **Jawab :**

- 1 Pertama periksa apakah U harmonik:

$$\frac{\partial U}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 2$$

dan

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Oleh karena itu

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 2 + 0 = 2 \neq 0 \Rightarrow U \text{ tidak harmonik!}$$

- 2 Oleh karena U tidak harmonik, maka U tidak memiliki sekawan harmonik.

Metode Milne-Thomson

Jika fungsi terurai $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ differentiable atau holomorfik, maka $f(x + iy)$ dapat dijadikan bentuk kompak $f(z)$ dengan metode Milne-Thomson¹ sebagai berikut:

- 1 tentukan $f'(x + iy)$, yaitu : $f'(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$
- 2 Ditinjau suku $\frac{\partial U}{\partial x}$
- 3 substitusi $\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow f'(z)$, $x \rightarrow z$ dan $y \rightarrow 0$
- 4 Selesaikan $f'(z)$ untuk memperoleh $f(z)$.
- 5 cari konstanta c pada $f(z)$ dengan substitusi $z=x+iy$ pada $f(z)$ dan membandingkannya dengan $f(x+iy)$ semula.

¹ Milne and Thomson, On the Relation of an Analytic Function of z to Its Real and Imaginary Parts, The Mathematical Gazette, 1937

Metode Milne-Thomson

Dengan metode Milne-Thomson, ubah bentuk terurai

$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 5 + 2ixy$ menjadi bentuk $f(z)$. **Jawab:**

$$\textcircled{1} f'(x + iy) = \frac{\partial U}{\partial x} + i \frac{\partial V}{\partial x} = 2x + i2y$$

$$\textcircled{2} \frac{\partial U}{\partial x} = 2x$$

$$\textcircled{3} \text{ substitusi } \frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow f'(z), x \rightarrow z \text{ dan } y \rightarrow 0$$

$$\textcircled{4} f'(z) = 2z$$

$$\textcircled{5} \text{ dengan demikian } f(z) = z^2 + c$$

$\textcircled{6}$ mencari c : substitusikan $z=x+iy$ pada $f(z)$ diperoleh

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + c + i2xy \text{ dan dibandingkan dengan}$$

$$f(x + iy) = x^2 - y^2 + 5 + i2xy \text{ semula, diperoleh } c = 5$$

$$\textcircled{7} \text{ Sehingga } f(z) = z^2 + 5$$

Metode Milne-Thomson

Contoh lain: Dengan metode Milne-Thomson, ubah bentuk terurai $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3xy^2 - y^3 - 10)$ menjadi bentuk $f(z)$. **Jawab:**

1 $f'(x + iy) = \dots\dots\dots$

2 $\frac{\partial U}{\partial x} = \dots\dots\dots$

3 substitusi $\frac{\partial U}{\partial x} \rightarrow f'(z)$, $x \rightarrow z$ dan $y \rightarrow 0$

4 $f'(z) = \dots\dots\dots$

5 dengan demikian $f(z) = \dots\dots\dots$

6 mencari c : $\dots\dots\dots$

7 Sehingga $f(z) = \dots\dots\dots$

Penutup

- 1 Mengubah bentuk kompak $f(z)$ ke bentuk terurai $f(x+iy)$ mudah dilakukan, dan $f(x+iy)$ yang berasal dari $f(z)$ bersifat holomorfik dan differentiable.
- 2 Pengubahan bentuk $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ ke bentuk $f(z)$ memerlukan syarat bahwa U dan V harmonik dan memenuhi PCR
- 3 Salah satu metode memperoleh $f(z)$ dari $f(x+iy)$ yang holomorfik adalah dengan metode Milne-Thomson
- 4 Pada bagian selanjutnya tentang Integral, akan dilihat bahwa setiap fungsi holomorfik memiliki sifat integral yang tidak bergantung lintasan.

Latihan

1 Jika ada, tentukan turunan dari fungsi terurai berikut :

1 $f(x + iy) = 3x + 5 + i(3z - 2)$

2 $f(z) = \frac{2i}{z-i}$

3 $f(z) = \sin z$

4 $f(z) = \sin(2z)$

2 Tentukan sekawan harmonik dari ?

1 $U(x, y) = x - y$

2 $U(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$

3 Dengan metode Milne-Thomson, ubah $f(x+iy)$ holomorfik berikut menjadi $f(z)$.

1 $f(x + iy) = 2x + 7 + i(2y - 11)$

2 $f(x + iy) = e^x \cos y - i(e^x \sin y + 5)$

3 $f(x + iy) = x^2 + 5x + 2 - y^2 + i(2xy + 5y + i)$