



**Telkom**  
University

## Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 8 : Fungsi Bentuk Kompak,  
Bentuk Terurai, Fungsi Harmonik,  
Persamaan Cauchy-Riemann, dan  
Fungsi Holomorfik (Bagian I)

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

## Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah kali ini adalah memaparkan **Persamaan Cauchy-Riemann (PCR) sebagai syarat suatu fungsi terurai bersifat *differentiable***, fungsi harmonik, dan fungsi holografik

## Catatan awal

- 1 Pada kuliah ini, kita akan mendefinisikan istilah : **Fungsi kompleks bentuk kompak (FKBK)** atau bentuk **BK**, dan **Fungsi kompleks bentuk terurai (FKBT)** atau bentuk **BT**.
- 2 **FKBK** menyatakan fungsi kompleks dalam bentuk variabel kompleks  $z$ , seperti  $f(z) = 2z + 5$
- 3 **FKBT** menyatakan fungsi dalam bentuk  $u + iv$ , seperti:  
 $f(x + iy) = (2x + 5) + i2y$
- 4 Pendefinisian **FKBK** dan **FKBT** digunakan untuk memudahkan perbedaan kedua bentuk.
- 5 Setiap **FKBK** dapat diubah ke bentuk **FKBT**, namun tidak setiap **FKBT** dapat diubah ke bentuk **FKBK**.
- 6 **Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)** diterapkan pada **FKBT**.

# Daftar Isi

## 1 Fungsi kompleks

# Fungsi kompleks bentuk kompak (FKBK) dan fungsi bentuk terurai (FKBT)

Pada pertemuan sebelumnya (limit, kontinuitas, dan turunan), kita membahas fungsi sebagai bentuk kompak (compact)<sup>1</sup>  $f(z)$ .

- ❶ Setiap bentuk kompak  $f(z)$  dapat dijadikan bentuk terurai:

$f(x + iy)$  dengan substitusi  $z = x + iy$ .

- ❷ **Contoh** : bentuk kompak  $f(z) = z^2$

Substitusi  $z = x + iy$ , diperoleh

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$$

- ❸  $f(z) = z^2$  kita sebut saja bentuk **FKBK** atau bentuk **BK**

- ❹  $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i2xy$  kita sebut **FKBT** atau bentuk **BT**

---

<sup>1</sup>bentuk kompak  $f(z)$  disebut pula bentuk elementer

## Pengubahan bentuk BK ke BT

Diberikan:

①  $f(z) = 2z + i$ , maka bentuk BT-nya adalah: ...

②  $f(z) = e^z$ , bentuk BT-nya adalah ...

③  $f(z) = z^2$ , bentuk BT-nya adalah ...

## Pengubahan bentuk BT ke BK

Mengubah bentuk BK ke BT cukup mudah dilakukan, namun sebaliknya mengubah bentuk BT ke BK tidak begitu mudah.

- 1  $f(x + iy) = 2x + i(2y + 1)$ , bentuk BK-nya adalah: ...
- 2  $f(x + iy) = e^x \cos(y) + i e^x \sin(y)$ , bentuk BK-nya ...
- 3  $f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i 2xy$ , bentuk BK-nya ...
- 4 Bentuk BT di atas dapat segera kita kembalikan ke bentuk BK karena sudah ada informasi dari contoh sebelumnya.

## Pengubahan bentuk BT ke BK

Terdapat bentuk BT yang tidak ada padanan bentuk BK-nya, misalnya:

$$\textcircled{1} f(x + iy) = x^2 + iy^2$$

$$\textcircled{2} f(x + iy) = 2x^2 + i2y^2$$

$$\textcircled{3} f(x + iy) = x^2 + iy^3$$



## Pengubahan bentuk BT ke BK

Jika bentuk BT dinyatakan dalam

$$f(x + iy) = U(x, y) + i V(x, y)$$

**Syarat perlu** agar BT dapat dikembalikan ke bentuk BK adalah<sup>2</sup>:

- ①  $U(x,y)$  harus memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

- ②  $V(x,y)$  juga harus memenuhi persamaan Laplace

$$\frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V(x, y)}{\partial y^2} = 0$$

---

<sup>2</sup>Untuk bukti, lihat Brown and Churchill, Ed.7 Hal.76

## Pengubahan bentuk BT ke BK

- 1 Fungsi yang memenuhi Persamaan Laplace disebut fungsi Harmonik<sup>3</sup>
- 2 Dengan kata lain, syarat perlu agar BT dapat dikembalikan ke BK adalah, baik  $U$  dan  $V$  harus merupakan fungsi harmonik.

---

<sup>3</sup>Fungsi harmonik terkait dengan gerakan harmonik di Fisika, seperti gerakan pegas, osilasi gelombang, dan sebagainya.

## Fungsi harmonik

- 1 **Contoh:** Periksalah apakah  $U$  dan  $V$  pada

$$f(x + iy) = (x^2 - y^2) + i(2xy)$$

adalah fungsi harmonik. **Jawab :**

- 2 Memeriksa  $U : U = x^2 - y^2$   
 Turunan arah  $x : U_x = 2x$  dan  $U_{xx} = 2$   
 Turunan arah  $y : U_y = -2y$  dan  $U_{yy} = -2$   
 $U_{xx} + U_{yy} = 2 + (-2) = 0$ , dengan demikian  
 $U(x, y) = x^2 - y^2$  adalah fungsi harmonik.
- 3 Memeriksa  $V : V = 2xy$   
 Turunan arah  $x : V_x = 2y$  dan  $V_{xx} = 0$
- 4 turunan pada arah  $y : V_y = 2x$  dan  $U_{yy} = 0$   
 $V_{xx} + V_{yy} = 0 + 0 = 0$ , dengan demikian  $V(x, y) = 2xy$   
 adalah fungsi harmonik.

## Fungsi harmonik

- 1 **Contoh lain:** Periksalah apakah  $U$  dan  $V$  pada

$$f(x + iy) = x^2y^2 + i(x^2 + y^2)$$

adalah fungsi harmonik. **Jawab :**

- 2 Memeriksa  $U$  :

- 3 Memeriksa  $V$  :

## Fungsi harmonik

- 1 Pada  $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ , jika salah satu atau kedua  $U$ , dan  $V$  tidak harmonik, maka bentuk terurai  $f(x, iy)$  tidak dapat diubah menjadi bentuk kompak.
- 2 **Contoh** : dapatkan  $f(x + iy) = \frac{1}{x+y} + i x^2 y^2$  dijadikan bentuk kompak  $f(z)$ ? Jawab:
- 3  $U = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow U_x = \frac{-1}{(x+y)^2} \Rightarrow U_{xx} = \frac{2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2}{(x+y)^3}$
- 4  $U = \frac{1}{x^2+y^2} \Rightarrow U_y = \frac{-1}{(x+y)^2} \Rightarrow U_{yy} = \frac{2(x+y)}{(x+y)^4} = \frac{2}{(x+y)^3}$
- 5  $U_{xx} + U_{yy} = \frac{4}{(x+y)^3} \neq 0$
- 6  $U$  bukan fungsi harmonik, oleh karena itu  $f(x + iy) = \frac{1}{x+y} + i x^2 y^2$  tidak dapat diubah ke bentuk  $f(z)$ .

# Fungsi Harmonik

1 **Contoh lain** : dapatkan  $f(x + iy) = (x + y) + iy \cos(x)$  dijadikan bentuk kompak  $f(z)$ ? Jawab:

2 Memeriksa  $U$

3  $U =$   $\Rightarrow U_x =$   $\Rightarrow U_{xx} =$

4  $U =$   $\Rightarrow U_y =$   $\Rightarrow U_{yy} =$

5  $U_{xx} + U_{yy} =$

6 Memeriksa  $V$

7  $V =$   $\Rightarrow V_x =$   $\Rightarrow V_{xx} =$

8  $V =$   $\Rightarrow V_y =$   $\Rightarrow V_{yy} =$

9  $V_{xx} + V_{yy} =$

10 Kesimpulan :

## Fungsi harmonik

- 1 Pada  $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$ , meskipun  $U(x, y)$ , dan  $V(x, y)$  harmonik, belum tentu  $f(x, iy)$  dapat dijadikan bentuk kompak  $f(z)$ .
- 2 Contoh:  $f(x + iy) = xy + i(x + y)$
- 3 Meskipun  $U = xy$  harmonik, dan  $V = x + y$  juga harmonik, namun  $f(x + iy) = xy + i(x + y)$  tidak dapat dijadikan  $f(z)$ .
- 4 Agar  $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$  dapat dijadikan  $f(z)$ , maka  $f(x + iy)$  harus differentiable dan  $U$  serta  $V$  harmonik.
- 5  $f(x + iy)$  differentiable jika  $U$  dan  $V$  memenuhi Persamaan Cauchy-Riemann (PCR).
- 6  $U$  dan  $V$  yang harmonik dan memenuhi PCR disebut sekawan harmonik.

## Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

- 1 Fungsi  $f(x + iy) = U(x, y) + iV(x, y)$  dapat diturunkan atau **differentiable**, jika dan hanya jika:<sup>4</sup>
- 2  $U_x = V_y$  dan  $U_y = -V_x$
- 3 Persamaan di atas disebut persamaan PCR
- 4 Fungsi **U** dan **V** yang memenuhi **PCR** disebut fungsi **sekawan harmonik**
- 5 dengan kata lain, **U** adalah sekawan harmonik dari **V** dan **V** adalah sekawan harmonik dari **U** jika **PCR** terpenuhi
- 6 fungsi  $f(x + iy)$  yang memenuhi **PCR** disebut **fungsi analitik** atau **fungsi holomorfik**.

---

<sup>4</sup>Untuk bukti, lihat Brown and Churchill, Edisi 7 hal.63



## Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

- 1 **Contoh:** Apakah  $f(x + iy) = x^2 - y^2 + i2xy$  differentiable atau holomorfik?
- 2 **Jawab:**  $U = x^2 - y^2 \Rightarrow U_x = 2x$
- 3  $U = x^2 - y^2 \Rightarrow U_y = -2y$
- 4  $V = 2xy \Rightarrow V_x = 2y$
- 5  $V = 2xy \Rightarrow V_y = 2x$
- 6 Syarat 1 PCR :  $U_x \stackrel{?}{=} V_y \Rightarrow 2x = 2x$  terpenuhi
- 7 Syarat 2 PCR :  $U_y \stackrel{?}{=} -V_x \Rightarrow -2y = -2y$  terpenuhi juga.
- 8 Dengan demikian PCR terpenuhi,  $f(x + iy)$  adalah fungsi differentiable.

## Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Contoh lain:

- 1 Apakah  $f(x + iy) = x^3 - 3xy^2 + i(3x^2y - y^3)$  differentiable?

**Jawab:**

2  $U = xy \Rightarrow U_x = \dots$

3  $U = xy \Rightarrow U_y = \dots$

4  $V = x + y \Rightarrow V_x = \dots$

5  $V = x + y \Rightarrow V_y = \dots$

6 Syarat 1 PCR :  $U_x \stackrel{?}{=} V_y \Rightarrow \dots \stackrel{?}{=} \dots$

7 Syarat 2 PCR :  $U_y \stackrel{?}{=} -V_x \Rightarrow \dots \stackrel{?}{=} \dots$

8 Kesimpulan : .....

## Persamaan Cauchy-Riemann (PCR)

Contoh lain lagi:

① Apakah  $f(x + iy) = xy + i(x + y)$  differentiable? **Jawab:**

②  $U = xy \Rightarrow U_x = \dots$

③  $U = xy \Rightarrow U_y = \dots$

④  $V = x + y \Rightarrow V_x = \dots$

⑤  $V = x + y \Rightarrow V_y = \dots$

⑥ Syarat 1 PCR :  $U_x \stackrel{?}{=} V_y \Rightarrow \dots \stackrel{?}{=} \dots$

⑦ Syarat 2 PCR :  $U_y \stackrel{?}{=} -V_x \Rightarrow \dots \stackrel{?}{=} \dots$

⑧ Kesimpulan : .....

# Latihan

1 Tentukan bentuk turunan  $f(x+iy)$  dari

1  $f(z) = z^4$

2  $f(z) = \frac{2i}{z-i}$

3  $f(z) = \sin z$

4  $f(z) = \sin(2z)$

2 Apakah fungsi berikut harmonik?

1  $U(x, y) = x^2 - x + y - y^2$

2  $U(x, y) = x \sin y - y \sin x$

3  $U(x, y) = y \ln(x)$

4  $U(x, y) = e^x \cos(y)$

3 Apakah fungsi turunan berikut holomorfik ?

1  $f(x + iy) = e^x \cos y - i e^x \sin y$

2  $f(x + iy) = e^x \sin y - i e^x \cos y$

3  $f(x + iy) = \frac{x}{x^2+y^2} - i \frac{y}{x^2+y^2}$