Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 7 : Limit, Kontinuitas, dan Turunan Fungsi Kompleks

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi 02: Agustus 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

Tujuan perkuliahan ini adalah mahasiswa dapat memahami tentang konsep limit, kontinuitas, dan turunan pada fungsi kompleks.

Daftar Isi

Catatan Awal

1. Konsep limit, kontinuitas, dan turunan pada fungsi kompleks $f(z)$ adalah perluasan dari konsep serupa pada fungsi riil.
2. Dengan demikian, jika variabel kompleks z diganti dengan variabel riil x, maka semua aturan limit, kontinuitas, dan turunan yang sudah ada pada fungsi riil terpenuhi.

Review: Limit pada fungsi riil

1. Pada fungsi riil $f(x)$, $\lim_{x\to a} f(x)$ bernilai L atau

$$\lim_{x_0\to a} f(x) = L$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

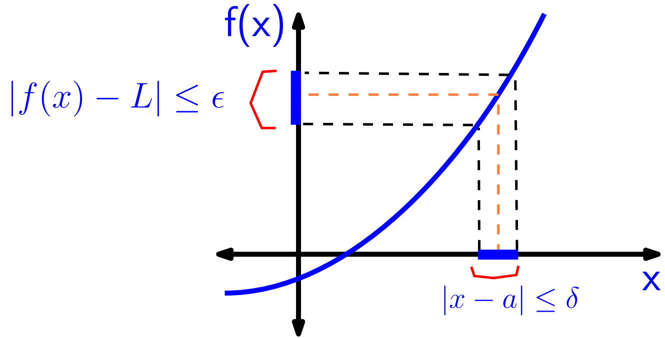
$$|f(x) - L| \leq \epsilon$$

untuk

$$|x - a| \leq \delta$$

Review: Limit pada fungsi riil

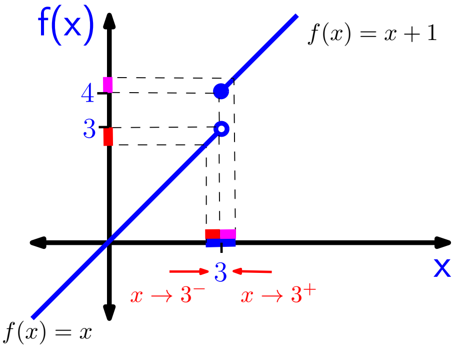
Ilustrasi Limit:



Pada ilustrasi di atas, limit fungsi f(x) di $x = a$ ada dan bernilai L , karena untuk interval $|x - a| \leq \delta$, terdapat pasangan interval $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

Review: Limit pada fungsi riil

Fungsi sepotong-sepotong: $f(x) = \begin{cases} x & \text{untuk} \quad x < 0 \\ x+1 & \text{untuk} \quad x \geq 3 \end{cases}$

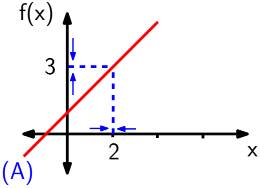


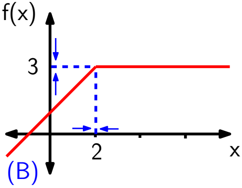
Tidak memiliki limit di $x = 3$, karena tidak ada ϵ yang memenuhi $|f(x) - L| \leq \epsilon$ untuk $|x - 3| \leq \delta$.

Review Limit Fungsi Riil

1. dari definisi sebelumnya, agar $\lim_{x\to a} f(x)$ ada dan bernilai L maka
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$
2. Meski $\lim_{x\to a} f(x) = L$, namun $f(a)$ tidak mesti sama dengan L.
3. Jika $\lim_{x\to a} f(x) = L$, dan $f(a) = L$ maka $f(z)$ dikatakan kontinyu di a.
4. Jika $\lim_{x\to a} f(x) = L$, namun $f(a) \neq L$ maka $f(z)$ dikatakan memiliki limit di a namun tidak kontinyu di a.

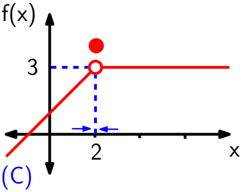
Mana yang memiliki limit dan kontinyu di x=2?

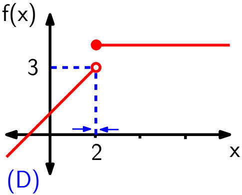




f(x)=x+1

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{untuk } x<2 \\ 3 & \text{untuk } x\geq 2 \end{cases}$$





$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{untuk } x<2 \\ 4 & \text{untuk } x=2 \\ 3 & \text{untuk } x>2 \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & \text{untuk } x<2 \\ 4 & \text{untuk } x\geq 2 \end{cases}$$

Fungsi Kompleks

Jawab:

(A) limit ada dengan nilai 3, kontinyu

(B) limit ada dengan nilai 3, kontinyu

(C) limit ada dengan nilai 3, tidak kontinyu

(D) limit tidak ada, dan tentu tidak kontinyu.

Limit Fungsi Kompleks

Konsep limit pada fungsi kompleks (f(z)) diperluas dari limit pada fungsi riil f(x) sebagai:

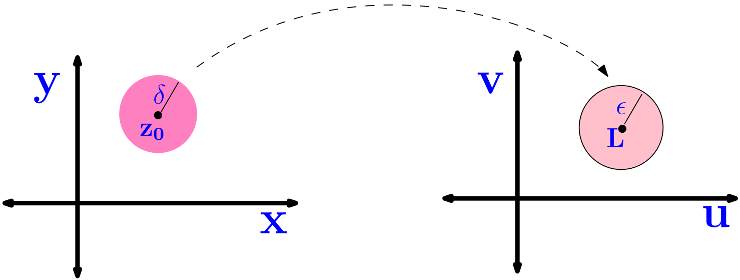
1. Pada fungsi kompleks $f(z)$, $\lim_{z \to z_0} f(z)$ bernilai L atau

$$\lim_{z \to z_0} f(x) = L$$

jika terdapat $\epsilon > 0$ dan $\delta > 0$ sedemikian sehingga

Limit Fungsi Kompleks

Ilustrasi:



$|z - z_0| \leq \delta$ adalah disk dengan pusat di z_0 dan jari-jari δ

$|f(z) - L| \leq \epsilon$ adalah disk dengan pusat di L dan jari-jari ϵ

Limit Fungsi Kompleks

1. Pada fungsi riil: $\lim_{x\to a} f(x)$ ada dan bernilai L maka

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

2. Pada fungsi kompleks $\lim_{z\to z_0} f(z)$ ada dan bernilai L maka nilai limit pada z_0 didekati dari semua arah ada dan sama nilainya yaitu L.
3. Meski $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, namun $f(z_0)$ tidak mesti sama dengan L.
4. Jika $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, dan $f(a) = L$ maka $f(z)$ dikatakan kontinyu di z_0.
5. Jika $\lim_{z\to z_0} f(z) = L$, namun $f(a) \neq L$ maka $f(z)$ dikatakan memiliki limit di a namun tidak kontinyu di a.

Turunan pada fungsi kompleks

1. Pada fungsi riil f(x), turunan didefinisikan

$$\frac{df(x)}{d(x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

2. Pada fungsi kompleks $f(z)$ turunan didefinisikan serupa:

$$\frac{df(z)}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

3. Interpretasi fisis turunan pada fungsi riil adalah gradien

Turunan pada fungsi kompleks

1. **Contoh**: tentukan $\frac{df(z)}{dz}$ untuk $f(z) = 2z$
2. **Jawab** :

$$\begin{aligned} \frac{d\,f(z)}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\ &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{2(z+\Delta z) - 2z}{\Delta z} \\ &= 2 \end{aligned}$$

3. Jika variabel kompleks z diganti dengan variabel riil x, maka kita peroleh turunan f(x)=2x adalah 2.

Turunan pada fungsi kompleks

1. **Contoh lain**: tentukan $\frac{df(z)}{dz}$ untuk $f(z) = z^2$
2. **Jawab** :

$$\begin{aligned}
\frac{d\,f(z)}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^2 - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z^2 + 2z\Delta z + (\Delta z)^2) - z^2}{\Delta z} \\
&= \lim_{\Delta z \to 0} 2z + \Delta z \\
&= 2z
\end{aligned}$$

Turunan pada fungsi kompleks

1. **Contoh lain lagi**[1]: tentukan $\frac{df(z)}{dz}$ untuk $f(z) = e^z$
2. **Jawab** :

$$
\begin{aligned}
\frac{d\,f(z)}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

[1] **Petunjuk**: gunakan identitas : $e^{\Delta z} = 1 + \Delta z + \frac{\Delta z^2}{2!} + \frac{\Delta z^3}{3!} + \cdots$

Daftar Turunan

Fungsi Riil

f(x)	f'(x)
c	0
x^n	$n\,x^{n-1}$
$ln\,(x)$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
$\sin\,(x)$	$\cos\,(x)$
$\cos\,(x)$	$\sin\,(x)$
$\tan(x)$	$\sec^2\,(x)$
$\arcsin\,(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos\,(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan\,(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Fungsi Kompleks

f(z)	f'(z)
c	0
z^n	$n\,z^{n-1}$
$ln\,(z)$	$\frac{1}{z}$
e^z	e^z
$\sin\,(z)$	$\cos\,(z)$
$\cos\,(z)$	$\sin\,(z)$
$\tan\,(z)$	$\sec^2\,(z)$
$\arcsin\,(z)$	$\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
$\arccos\,(z)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-z^2}}$
$\arctan\,(z)$	$\frac{1}{1+z^2}$

Aturan Turunan

Aturan penurunan pada fungsi riil berlaku pada fungsi kompleks:
Jika $f(z)$ dan $g(z)$ adalah dua fungsi kompleks, maka :

1. Penjumlahan : $\frac{d}{dz}(f(z) + g(x)) = f'(z) + g'(z)$
2. Perkalian skalar : $\frac{d}{dz}(kf(z)) = kf'(z)$
3. Aturan rantai : $\frac{d}{dz}(f(g(z))) = f'(g(z))\,g'(z)$
4. Aturan perkalian : $\frac{d}{dz}\left[f(z)\,g(z)\right] = f'(z)\,g(z) + g'(z)\,f(z)$
5. Aturan pembagian : $\dfrac{d}{dz}\dfrac{f(z)}{g(z)} = \frac{f'(z)g(z)-g'(z)f(z)}{g^2(z)}$

Contoh

- Tentukan $f'(z)$ pada $z = i$ untuk fungsi $f(z) = z\ e^z$
- **Jawab:** $f(z) = z\ e^z$, gunakan aturan perkalian pada turunan:

$$\begin{aligned} f'(z) = \frac{df(z)}{dz} &= z\frac{d(e^z)}{dz} + e^z\frac{d(z)}{dz} \\ &= ze^z + e^z \end{aligned}$$

- z=i, maka

$$\begin{aligned} f'(z) &= ie^i + e^i = i(\cos 1 + i\ \sin 1) + (\cos 1 + i\ \sin 1) \\ &= i(0,54 + i0,84) + (0,54 + i0,84) \\ &= (-0.84 + 0.54) + i(0,54 + 0,84) = -0.3 + i1,38 \end{aligned}$$

Contoh lain:

- Tentukan $f'(z)$ pada untuk fungsi $f(z) = \frac{z}{e^z}$
- **Jawab:** $\cdots$

- Tentukan $f'(z)$ pada untuk fungsi $f(z) = z^2 + z\cos(2z)$
- **Jawab:** $\cdots$

Latihan

- Suatu fungsi kompleks dinyatakan sebagai fungsi sepotong-sepotong:

$$f(z) = \begin{cases} \frac{z+1}{z+1} & \text{untuk} \quad z \neq 1 \\ 2 & \text{untuk} \quad z=1 \end{cases}$$

  apakah f(z) kontinyu di z=1?

- Tentukan turunan dari fungsi berikut:
  1. $f(z) = 2 + iz + z^2$
  2. $f(z) = (z + i)\, ln(z)$
  3. $f(z) = (z^2 + 2i) \arctan(z)$