



Telkom
University

Variabel Kompleks (VARKOM)

Pertemuan 6 : Fungsi kompleks

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi : Agustus 2018

Faculty of Electrical Engineering, Telkom University

Tujuan Perkuliahan

Tujuan dari Kuliah kali ini adalah memaparkan **konsep fungsi pada bidang kompleks, daerah asal dan daerah hasil**, serta **titik singular pada fungsi**.

Konsep fungsi berguna sebagai **landasan** pembahasan selanjutnya tentang **limit, kontinuitas, derivatif, dan integral**.

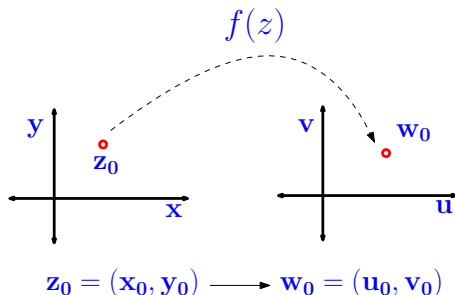
Daftar Isi

- 1 Fungsi kompleks
- 2 Invers Fungsi
- 3 Titik Singular
- 4 Fungsi sepotong-sepotong

Fungsi kompleks

Fungsi kompleks $f(z)$ menyatakan **pemetaan** dari **bidang kompleks asal z (domain)** ke **bidang kompleks hasil w (range)** dengan suatu pola yang diatur oleh $f(z)$.

- 1 setiap titik $z_0(x_0, y_0)$ pada bidang kompleks asal z dipetakan ke titik $w_0(u_0, v_0)$ pada bidang kompleks w .



Fungsi Kompleks

Pada umumnya, pemetaan: $z \rightarrow w$ memetakan:

- 1 Titik ke titik
- 2 Lintasan ke lintasan
- 3 Daerah ke daerah
- 4 dan kemungkinan lainnya (lintasan ke titik, daerah ke garis, daerah ke titik, dsb.)

Fungsi kompleks

Pemetaan titik ke titik

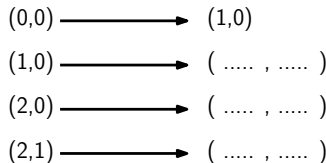
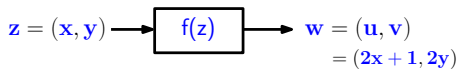
1 **Contoh:** $f(z) = 2z + 1$
maka:

2 setiap titik $z = x + iy$
akan dipetakan ke:

$$\begin{aligned} w &= f(z) = 2z + 1 \\ &= 2(x + iy) + 1 \\ &= (2x + 1) + i2y \end{aligned}$$

3 $u(x,y) = 2x + 1$

4 $v(x,y) = 2y$



Fungsi kompleks

- 1 Contoh lain: $f(z) = z^2$
- 2 setiap titik $z = x + iy$ akan dipetakan ke:

$$\begin{aligned}
 w &= f(z) = z^2 \\
 &= (x + iy)^2 \\
 &= (\dots\dots\dots) + i(\dots\dots\dots)
 \end{aligned}$$

$$z = (x, y) \longrightarrow \boxed{f(z)} \longrightarrow w = (u, v) \\
 = (\dots\dots\dots, \dots\dots\dots)$$

$$(0,0) \longrightarrow (\dots\dots , \dots\dots)$$

$$(1,0) \longrightarrow (\dots\dots , \dots\dots)$$

$$(2,0) \longrightarrow (\dots\dots , \dots\dots)$$

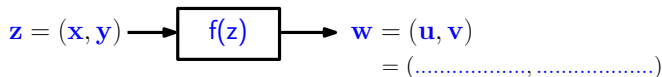
$$(2,1) \longrightarrow (\dots\dots , \dots\dots)$$

Fungsi kompleks

1 Contoh lain lagi: $f(z) = |z| + 1$

2 $u(x,y) = \dots + i \dots$

3 $v(x,y) = \dots + i \dots$



$$(0,0) \longrightarrow (\dots, \dots)$$

$$(1,0) \longrightarrow (\dots, \dots)$$

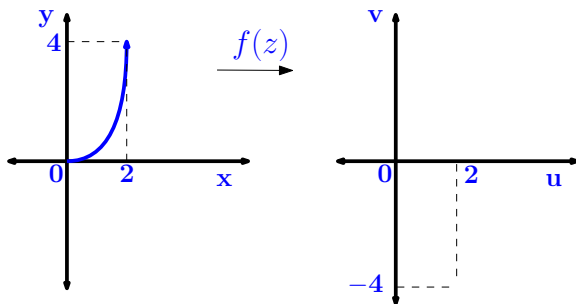
$$(2,0) \longrightarrow (\dots, \dots)$$

$$(2,1) \longrightarrow (\dots, \dots)$$

Fungsi Kompleks

Pemetaan **Lintasan** ke **Lintasan**:

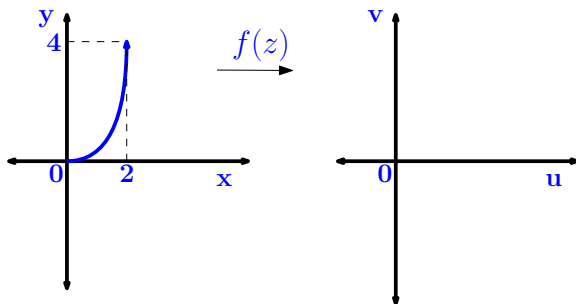
- 1 Misal $f(z) = \bar{z}$
- 2 Lintasan $c : z = t + it^2, 0 \leq t \leq 2$ akan dipetakan ke
- 3 lintasan $c' : w = f(z) = \bar{z} = t - it^2, 0 \leq t \leq 2$



Fungsi Kompleks

Pemetaan **Lintasan** ke **Lintasan**:

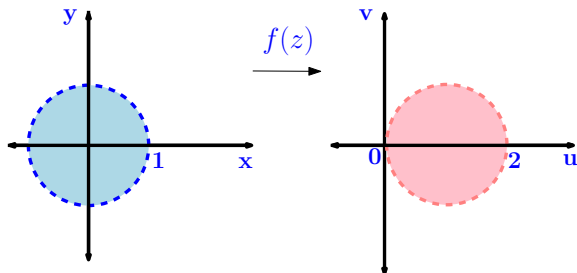
- 1 Contoh lain: $f(z) = 2z + 1$
- 2 Lintasan $c : z = t + it^2, 0 \leq t \leq 2$ akan dipetakan ke
- 3 lintasan $c' : w = f(z) = \dots\dots\dots + i\dots\dots\dots, 0 \leq t \leq 2$



Fungsi Kompleks

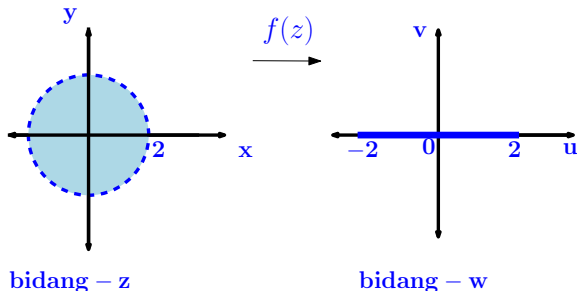
Pemetaan daerah ke daerah:

- 1 Misal $f(z) = z + 1$
- 2 Daerah $D : |z| < 1$ akan dipetakan ke
- 3 daerah D' :
- 4 yaitu: $f(z) = w = z + 1$ atau $z = w - 1$ atau $|z| = |w - 1|$;
 $|z| < 1$ menjadi $|w - 1| < 1$



Fungsi Kompleks

- 1 Tidak selalu $f(z)$ memetakan suatu daerah ke daerah.
- 2 Terdapat pemetaan $f(z)$ yang memetakan dari daerah ke garis.
- 3 Contoh: Kemana $f(z) = \operatorname{Re}(z)$ memetakan daerah $|z| < 2$?
Jawab: $w = f(z) = \operatorname{Re}(z) = x$. Dengan demikian, setiap titik $z = x + iy$ dengan $|x + iy| \leq 2$ dipetakan ke $w = x$ dengan $|x| < 2$.



Fungsi Kompleks

- 1 Fungsi yang memetakan suatu daerah menjadi garis menunjukkan ada 2 atau lebih titik yang dipetakan ke titik yang sama
- 2 Pada $f(z) = \text{Re}(z)$
 - (1,0) dipetakan ke (1,0)
 - (1,1) dipetakan ke (..... ,)
 - (1,2) dipetakan ke (..... ,)
- 3 Fungsi pemetaan dari **banyak** ke **satu** seperti ini tidak memiliki invers

Invers Fungsi Kompleks

Fungsi $f(z)$ memetakan z ke w . Fungsi invers dari $f(z)$, yaitu $g(z) = f^{-1}(z)$ sebaliknya memetakan w kembali ke z .

- 1 Contoh: $w = f(z) = 2z + 1$
- 2 Fungsi ini memetakan $(1,1)$ ke $(3,2)$
- 3 sebaliknya $g(z) = \frac{z-1}{2}$, memetakan kembali $(3,2)$ ke $(1,1)$.
- 4 Fungsi $g(z) = \frac{z-1}{2}$ adalah invers dari $f(z) = 2z + 1$

Invers Fungsi Kompleks

Untuk mencari fungsi invers dari $f(z) = w$, maka gantikan $w \rightarrow z$ dan $z \rightarrow w$, setelah itu selesaikan persamaan dalam w .

❶ **Contoh:** tentukan invers dari $f(z) = 2z + 1$

❷ **Jawab:** $f(z) = w = 2z + 1$. Gantikan : $w \rightarrow z$ dan $z \rightarrow w$, kita peroleh $z = 2w + 1$. Selesaikan dalam w :

$$\begin{aligned} z &= 2w + 1 \\ \Leftrightarrow 2w &= z - 1 \\ \Leftrightarrow w &= \frac{z - 1}{2} \end{aligned}$$

❸ dengan demikian, $g(z) = f^{-1}(z) = \frac{z-1}{2}$

Invers Fungsi Kompleks

- 1 Inverse dari fungsi $f(z) = 5z + 3$ adalah
- 2 Inverse dari fungsi $f(z) = \frac{1}{z}$ adalah
- 3 Inverse dari fungsi $f(z) = \frac{z}{z+1}$ adalah

Titik Singular

Titik singular : Pada beberapa fungsi, tidak semua titik dapat dipetakan ke titik lain.

- 1 contoh:** $f(z) = \frac{1}{z+1}$, maka titik asal $z = -1$ dipetakan ke ∞ (bukan titik).
- 2** Pada fungsi $f(z) = \frac{(z+1)(z+2)}{z+2}$, titik $z = -2$ tidak dapat dipetakan karena titik petanya berbentuk $\frac{0}{0}$ (bukan titik).
- 3** Titik yang dipetakan ke ∞ , $-\infty$, bentuk $\frac{0}{0}$, bentuk 0^0 disebut titik singular.
- 4** Titik singular dari $f(z) = \frac{z+1}{z^2-1}$ adalah dan
- 5** Adakah titik singular pada fungsi $f(z) = 2z^2 + 1$?

Fungsi sepotong-sepotong

Dimungkinkan untuk melakukan pemetaan dengan fungsi berbeda untuk daerah yang berbeda. Contoh:

$$f(z) = \begin{cases} 1 & \text{untuk } 0 \leq |z| \leq 1 \\ \frac{1}{z} & \text{untuk } |z| > 1 \end{cases}$$

- 1 daerah perbatasan adalah daerah transisi antar dua fungsi. ($|z| = 1$ pada contoh di atas)
- 2 Fungsi sepotong-sepotong dapat digunakan untuk menghapus titik singular.
- 3 Adakah titik singular untuk $f(z)$ di atas?
- 4 Meski fungsi sepotong-sepotong dapat menghapus titik singular, namun ada resiko fungsi tidak memiliki limit dan tidak kontinu di daerah perbatasan.

Latihan

- 1 Tentukan $u(x,y)$ dan $v(x,y)$ dari fungsi berikut:
 - 1 $f(z) = (2z + 1) + i(z - 2)$
 - 2 $f(z) = -\frac{2i}{z-i}$
 - 3 $f(z) = (r + i)e^{-i\theta}$
 - 4 $f(x) = e^{i\theta} + e^{-i\theta}$

- 2 Suatu fungsi $f(z) = 1/z$. Sketsa kemanakah lintasan $z = t^2 + it$ dengan $1 \leq t \leq 2$ dipetakan!

- 3 Suatu fungsi $f(z) = 1/z$. Sketsa kemana daerah D $|z| < 1$ dipetakan!

- 4 Tentukan inverse dari fungsi kompleks: $f(z) = \frac{z+1}{z+2}$

- 5 Apakah syarat suatu fungsi kompleks memiliki inverse?