

Variabel Kompleks (VARKOM)

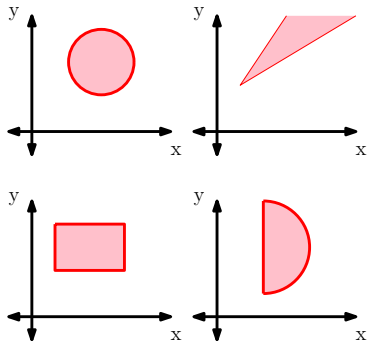
Pertemuan 4 : Daerah dan lintasan pada bidang kompleks

Oleh : Team Dosen Varkom S1-TT

Versi 02: Agustus 2018

Bidang kompleks

- 1 Kita dapat menyeleksi sebagian dari bidang kompleks sesuai keinginan.
- 2 Penyeleksian dapat dilakukan dengan mengatur :
 - 1 Modulus: $|z|$
 - 2 Argumen: $\angle z$
 - 3 Kombinasi Modulus dan Argumen
 - 4 bagian Riil: $Re(z)$
 - 5 bagian Imaginer: $Im(z)$
 - 6 Kombinasi Riil dan Imaginer
 - 7 Kombinasi semua



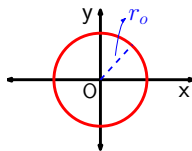
Bidang Kompleks : notasi Polar

$z = |z| e^{i\angle z}$, $|z|$: modulus, dan $\angle z$: argumen.

Mengatur **Modulus**.

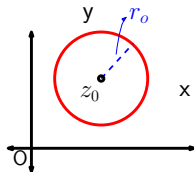
1 $|z| = r_0$ menyatakan lingkaran:

- pusat di $O(0,0)$
- jari-jari r_0



2 $|z - z_0| = r_0$ menyatakan lingkaran:

- pusat di z_0
- jari-jari r_0



Bidang Kompleks : notasi Polar

Cobalah sketsa:

1 $|z| = 2$

2 $|z| = 3$

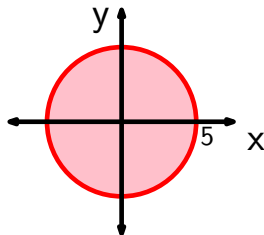
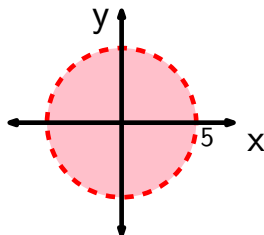
3 $|z - (1 + i)| = 2$

4 $|z + 1 + 2i| = 3$

Bidang Kompleks : notasi Polar

Mengatur area dengan **Modulus**.

- 1 Area di dalam lingkaran dinyatakan dengan $<$ atau \leq
- 2 Area di luar lingkaran dinyatakan dengan $>$ atau \geq
- 3 $|z| < 5$
- 4 $|z| \leq 5$
- 5 Gambarkan : $|x| \geq 5$



Bidang Kompleks : notasi Polar

Gambarkan:

1 $|z - 1 - i| < 5$

2 $|z + i| \leq 5$

3 $|z + 1| \geq 5$

4 Variasi : $|2z + 1| \geq 5^a$

^abagi kedua ruas dengan 2

Bidang Kompleks : notasi Polar

Gambarkan:

1 $3 \leq |z| < 5$

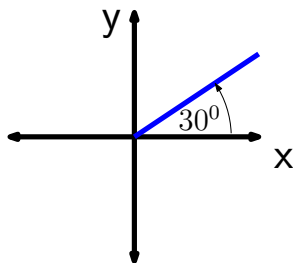
2 $3 \leq |z - 1 - i| < 5$

3 $3 \leq |z + 1| \leq 5$

Bidang Kompleks : notasi Polar

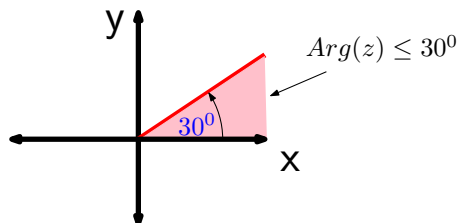
Mengatur *Argumen*.

- 1 $Arg(z) = \theta_0$
- 2 adalah garis lurus dengan sudut θ_0 terhadap sumbu riil.
- 3 Contoh : $Arg(z) = 30^0$
- 4 Gambarkan : $Arg(z) = 135^0$

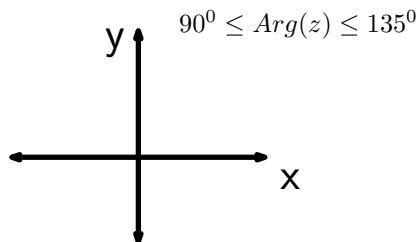


Dengan mengambil sudut argumen $[0^{\circ} - 360^{\circ}]$, gambarkan:

1 $Arg(z) \leq 30^{\circ}$

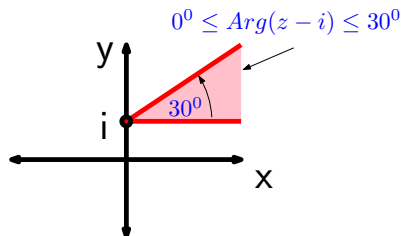


2 $90^{\circ} \leq Arg(z) \leq 135^{\circ}$

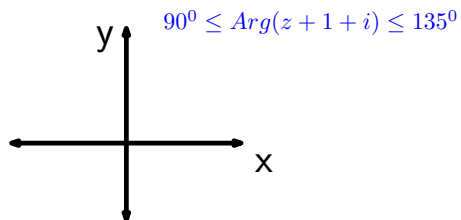


Menggeser pusat koordinat:

① $0 \leq \text{Arg}(z - i) \leq 30^\circ$



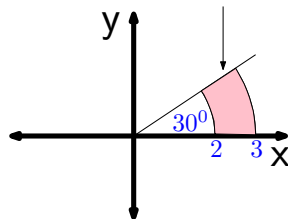
② $90 \leq \text{Arg}(z + 1 + i) \leq 135^\circ$



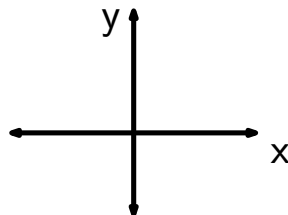
Mengatur **Modulus** dan **Argumen** sekaligus:

$$2 \leq |z| \leq 3 ; 0 \leq \text{Arg}(z) \leq 30^\circ$$

① $2 \leq |z| \leq 3$ dan
 $0^\circ \leq \text{Arg}(z) \leq 30^\circ$



② $1 \leq |z| \leq 4$ dan
 $90^\circ \leq \text{Arg}(z) \leq 135^\circ$



Bidang Kompleks pada notasi Polar

Beberapa soal review:

Gambar:

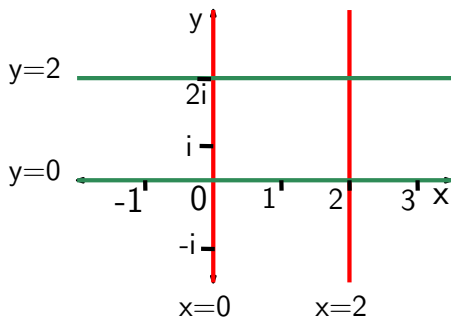
- 1 Gambarkan :** $|z + 2| \leq 1$
- 2** $|z + 2| \leq 1$ adalah area bagian dalam lingkaran tersebut.
- 3 Gambarkan :** $|z + 1 - 2i|$
- 4 Gambarkan :**
 $35^\circ \leq \arg(z) \leq 100^\circ$
- 5 Gambarkan :**
 $35^\circ \leq \arg(z + 1 + i) \leq 100^\circ$

Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Mengatur **bagian Riil** dan **Imajiner**.

Jika $z = x + iy$, maka

- 1 $Re(z) = 0$ ekuivalen dengan $x = 0$
- 2 $Re(z) = 2$ ekuivalen dengan $x = 2$
- 3 $Im(z) = 0$ ekuivalen dengan $y = 0$
- 4 $Im(z) = 2$ ekuivalen dengan $y = 2$

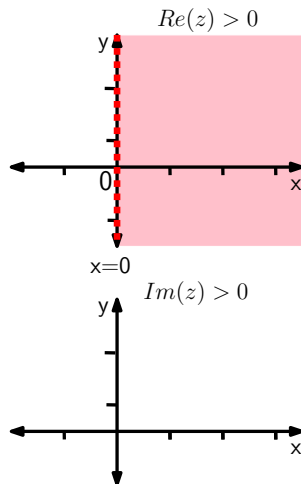


Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Seleksi area **bagian** Riil dan **Imaginer** dilakukan dengan tanda $<$ atau \leq atau $>$ atau \geq .

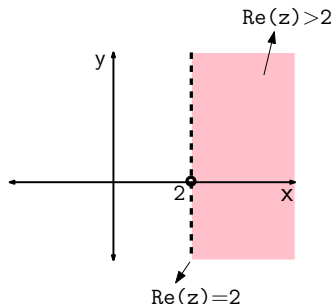
1 $Re(z) > 0$ ekuivalen dengan $x > 0$

2 $Im(z) > 0$ ekuivalen dengan $y > 0$



Bidang kompleks pada notasi Kartesian

Mengatur **bagian Riil dan Imaginer.**



3 Gambar daerah : $Re(z) > 2$

Cobalah :

5 Gambarkan daerah : $Re(z) \leq 4$

6 Gambarkan daerah :
 $2 < Re(z) \leq 4$

Bidang kompleks

Gambarkan:

1 $Im(z) > -2$

2 $-2 < Im(z) \leq 4$

3 $-2 < Im(z) \leq 4$
dan $Re(z) > 2$

4 $-2 < Im(z) \leq 4$
dan
 $0 \leq Re(z) \leq 2$

1	2
3	4

Bidang kompleks

Variasi lain:

① Gambarkan :

$$\operatorname{Re}(z + 2 + 3i) < 5$$

② Jawab :

$$\operatorname{Re}(z + 2 + 3i) < 5$$

$$\operatorname{Re}(x + yi + 2 + 3i) < 5$$

$$\operatorname{Re}((x + 2) + (y + 3i)) < 5$$

$$x + 2 < 5$$

$$x < 3$$

Atau: $\operatorname{Re}(z) < 3$

Gambar:

Bidang kompleks

Variasi lain:

1 Gambarkan :

$$\text{Im}(2z - 3 + 4i) < 7$$

Gambar:

2 Jawab :

$$\text{Im}(2z - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}(2(x + yi) - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}(2x + 2yi - 3 + 4i) < 7$$

$$\text{Im}((2x - 3) + (2y + 4)i) < 7$$

$$2y + 4 < 7$$

$$y < \frac{3}{2}$$

$$\text{Atau: } \text{Im}(z) < \frac{3}{2}$$

Bidang Kompleks

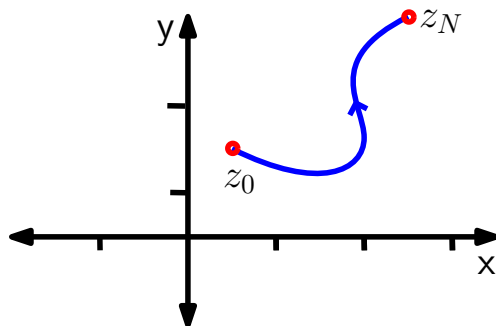
Variasi lain:

- 1 **Gambar** : $Re(z) \leq Im(z)$
- 2 **Gambar** : $Re(z) \leq Im(z + 3i)$
- 3 **Gambar** : $Re(z + 5 + 3i) \leq Im(z + 4 - 2i)$

Definisi Lintasan

Lintasan adalah arah tempat kedudukan berupa **kurva** pada bidang kompleks:

- 1 Memiliki titik awal (z_0)
- 2 Memiliki titik akhir (z_N)



Persamaan parameterik lintasan

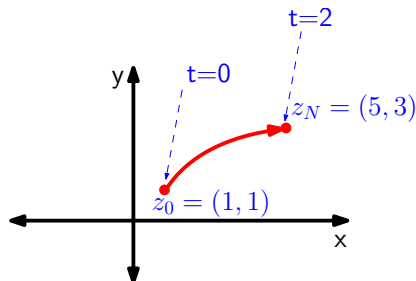
Cara termudah menyatakan lintasan adalah dengan persamaan parameterik:

- 1 $z = x + iy$
- 2 x dan y adalah fungsi t
- 3 Contoh:

$$z = (t^2 + 1) + i(t + 1)$$

dengan $0 \leq t \leq 2$
(misalnya)

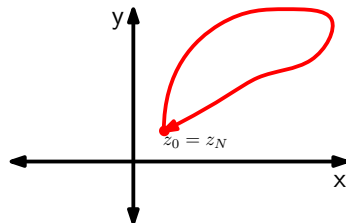
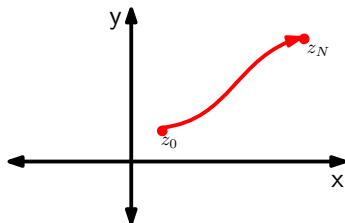
- 4 titik awal : $t = 0 \rightarrow$
 $z_0 = 1 + i$, titik ujung
 $z_N = 5 + 3i$



Lintasan tertutup dan tidak tertutup

Lintasan tertutup : titik ujung bertemu titik awal $z_N = z_0$

Lintasan tak tertutup : titik ujung tidak bertemu titik awal $z_N \neq z_0$



Lintasan pada bidang kompleks

Gambarkan lintasan pada bidang kompleks:

$$z = x(t) + iy(t)$$

dengan:

- 1 $x(t) = -t + 1$
- 2 $y(t) = t^3$
- 3 $-1 \leq t \leq 1$

t	-1	-0,5	0	0.5	1
z	2-i	0,5-i0,125

Latihan 4

Gambarkan:

① $1 \leq |z + 2i| \leq 3$

② $45^\circ \leq \text{Arg}(z + 1 + 2i) \leq 180^\circ$

③ $|z| \leq 3$ dan $\text{Re}(z) \geq 2$

④ $z = x + iy$, dengan

① $x = 2t$

② $y = \sqrt{4 - t}$

③ $0 \leq t \leq 4$